

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет

В.Б. Порошин

НАЧИНАЕМ УЧИТЬ СОПРОМАТ
(Введение в курс сопротивления материалов)
Учебное пособие

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2009

УДК 539.4 (075.8)

Порошин В.Б. **Начинаем учить сопромат (Введение в курс сопротивления материалов):** Учебное пособие. Под ред. проф. И.Я.Березина. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. – 56 с.

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие относится к так называемым адаптивным. Необходимость таких изданий подсказана практикой преподавания как основной дисциплины – сопротивления материалов, так и родственных ей – прикладной и технической механики, куда сопромат входит важнейшей составляющей.

Одна из основных задач адаптивного пособия – подготовить учащихся к изучению этого непростого предмета. С этой целью сведены воедино и систематизированы необходимые сведения из курсов физики, математики, геометрии, теоретической механики.

Здесь же вводится ряд основных понятий сопротивления материалов – расчетная схема, схематизация свойств материала, геометрических параметров объекта расчета и приложенных к нему нагрузок. Завершается пособие изложением начального раздела курса, посвященного анализу внутренних силовых факторов в стержневых системах. Кроме того, в пособие включен ряд подробно разобранных примеров, которые будут полезны при самостоятельной работе.

Оно адресовано студентам всех специальностей, изучающим сопротивление материалов как в виде отдельного курса, так и в рамках прикладной и технической механики.

Ил.49, табл. 2, список лит., – 4 назв.

© Издательство ЮУрГУ, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА	4
ОТ АВТОРА, ИЛИ КАК ПОЯВИЛОСЬ ЭТО ПОСОБИЕ	5
1 ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАЗМЕРНОСТИ	6
2 НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ	8
3 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЗАИМОСВЯЗИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ	11
4 СИЛА В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ	13
5 МОМЕНТ СИЛЫ И ПАРЫ СИЛ	16
6 УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ: ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ	18
7 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ – ЧТО ЭТО?	27
8 ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ, ВЫПОЛНЯЯ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ	28
9 СХЕМАТИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА	30
10 СХЕМАТИЗАЦИЯ НАГРУЗКИ	33
11 СХЕМАТИЗАЦИЯ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА	38
12 СУТЬ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ	39
13 МЕТОД СЕЧЕНИЙ И АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ	40
13.1 Простые виды нагружения	42
13.2 Построение эпюр внутренних силовых факторов с помощью метода сечений	44
ЛИТЕРАТУРА.....	56

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Чтобы понять, чему полезному вы можете научиться, проходя курс сопротивления материалов, попробуем, рассматривая конкретный пример, задуматься над такими неприятными для нас вопросами:

- почему импортные легковые автомобили существенно легче отечественных аналогов?
- почему при этом иномарки по безопасности и надежности значительно превосходят наши автомобили?
- почему, несмотря на высокие цены, иномарки пользуются более высоким спросом у покупателей?

Ответ на эти вопросы кроется в распространенном среди инженеров выражении: «...если конкуренты вас обошли, то это значит, что они лучше считают».

Обращаем ваше внимание на то, что ключевое слово в этом афоризме – «считают» и вот почему: при создании современных машин, технологических линий, сооружений и т.п. инженер проходит путь от замысла новой конструкции к изготовлению рабочих чертежей и затем к производству изделий. Известно, что успех любого инженерного проекта во многом зависит от того, насколько профессионально на ранних этапах проектирования будет выполнена работа по обеспечению прочности создаваемого изделия. Поэтому при выпуске рабочих чертежей все ответственные детали конструкции тщательно «просчитываются» с целью обеспечить необходимую прочность при минимально возможном весе изделия.

Теперь становится понятным назначение курса «Сопротивление материалов»: в нем излагаются основы теории и инженерные методы расчетов на прочность. В последующем при изучении специальных дисциплин на выпускающих кафедрах эти методы будут развиваться применительно к задачам вашей специальности и эффективно использоваться в курсовых и дипломных проектах.

Желаем вам удачи в этом нелегком деле; надеемся на то, что в скором времени вы станете успешными инженерами, и тогда качество российской техники превзойдет мировой уровень.

Доктор технических наук, профессор И.Я.Березин

ОТ АВТОРА, ИЛИ КАК ПОЯВИЛОСЬ ЭТО ПОСОБИЕ

Итак, в вашем учебном расписании появился новый предмет – СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ. Предмет важный, нужный, без него и инженер – не инженер и, вместе с тем, самая расхожая «страшилка всех времен и народов». Спору нет, дисциплина серьезная, но... не так страшен черт, как его малюют, и показать это – одна из задач этого пособия.

Перед изучением курса предполагается, что вам известны основные положения алгебры, геометрии, тригонометрии, физики (в основном, раздела «Механика»), теоретической механики. Тем не менее, автор считает нелишним напомнить их. Поэтому, во-вторых, в этой скромной по объему книжце сведен и систематизирован тот необходимый минимум сведений, без которого уже в самом начале может возникнуть серьезное недопонимание предмета.

И, в-третьих, помимо материала, носящего справочный, «напоминательный» характер, в ней говорится о том, **чем занимается Соппротивление материалов**, определяются некоторые **важнейшие понятия**, а также излагается «стартовый» раздел курса: **анализ внутренних силовых факторов в стержневых системах**. Многолетний опыт показывает, что этот раздел вызывает затруднение, в основном, потому, что он первый и закладывает основы понимания (или непонимания) всего курса. Именно ему посвящено первое расчетно-графическое задание, самостоятельно выполняемое учащимися, поскольку без информации о нагруженности системы ни о каком расчете на прочность или жесткость не может быть и речи. Не случайно значительную часть пособия занимают примеры – надеюсь, они послужат надежным подспорьем в самостоятельной работе.

Эти соображения и вдохновили автора на попытку рассказать обо всем пусть не очень строго, зато просто и понятно, в форме разговора с авторитетным в данной области человеком, назовем его *Наставником*.

Кстати, вот он, прошу любить и жаловать.

Честно говоря, в те времена науки о прочности еще не существовало, но ведь чем старше *Наставник*, тем большее уважение он внушает – не так ли?

Вопросы, которые мы ему будем задавать, в тексте набраны шрифтом Arial, а ответы – **Times New Roman**.

Термины, понятия и определения в тексте набраны *курсивом*, а моменты, на которые необходимо обратить особое внимание – **жирным шрифтом**.



Автор признателен доценту кафедры «Прикладная механика, динамика и прочность машин» ЮУрГУ Ольге Петровне Колосовой за помощь в подготовке материала.

Ну, кажется, все, о чем следовало бы договориться предварительно, сказано. А теперь к делу!

– Итак, уважаемый Наставник, с чего мы начнем?

1 ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАЗМЕРНОСТИ



– А начнем мы с самого простого – с тех физических величин, которые нам понадобятся в дальнейшем, и тех единиц, в которых они измеряются. А потребуется их поначалу совсем немного – *линейный размер, масса, сила.*

Линейные размеры (используются разные обозначения – «*a*», «*b*», «*c*», «*l*» и множество других) измеряются в метрах (*м*) – это основная единица, сантиметрах (*см*, $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$), миллиметрах (*мм*, $1 \text{ мм} = 0,1 \text{ см} = 10^{-3} \text{ м}$) и изредка (по крайней мере, в технике) в километрах

(*км*, $1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$). Производными от единиц линейных являются единицы измерения площади – квадратный метр (м^2), объема – кубический метр, кубометр (м^3). Остальные, с ними связанные, получаются, по сути дела, перемножением сторон соответствующей фигуры (квадрата или куба), например,

$$1 \text{ м}^2 = 1 \text{ м} \times 1 \text{ м} = 10^2 \text{ см} \times 10^2 \text{ см} = 10^4 \text{ см}^2 = \\ = 10^3 \text{ мм} \times 10^3 \text{ мм} = 10^6 \text{ мм}^2;$$

$$1 \text{ м}^3 = 1 \text{ м} \times 1 \text{ м} \times 1 \text{ м} = 10^2 \text{ см} \times 10^2 \text{ см} \times 10^2 \text{ см} = \\ = 10^6 \text{ см}^3 = 10^9 \text{ мм}^3.$$

Конечно, только этими величинами дело не кончается, в дальнейшем нам потребуются и другие, более сложные, геометрические характеристики, такие как, **осевой и полярный моменты инерции** и соответствующие им **моменты сопротивления**.

А пока обратимся к наиболее простым плоским фигурам и вспомним, как определяются их площади (табл. 1).

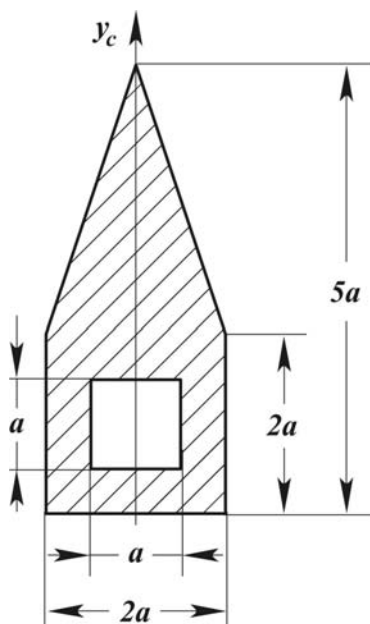
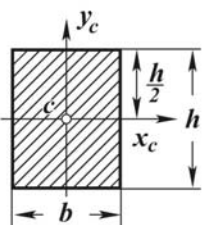
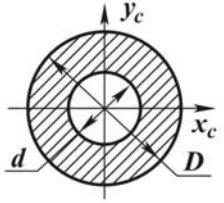
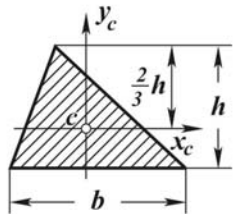
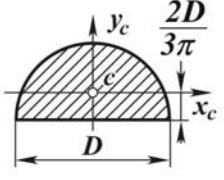
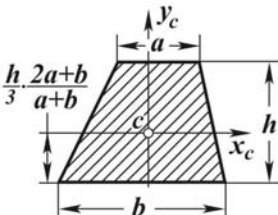
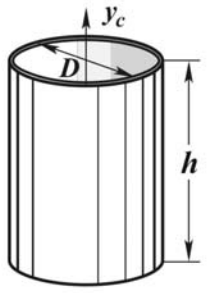
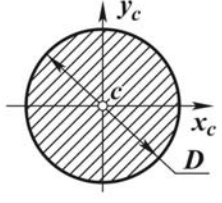


Рис. 1. Довольно простая составная фигура в виде «домика»

Пример 1. Попробуйте, пользуясь этой таблицей, определить площадь фигуры-«домика», показанной на рис. 1.

Таблица 1 Выражения для определения площадей простейших фигур

Фигура	Площадь	Фигура	Площадь
 прямоугольник	bh	 кольцо	$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$
 треугольник	$\frac{1}{2}bh$	 полукруг	$\frac{\pi D^2}{8}$
 трапеция	$\frac{1}{2}(a+b)h$	 боковая поверхность цилиндра	πDh
 круг	$\frac{\pi D^2}{4}$		

Примечание: x_c, y_c – центральные (проходящие через центр тяжести C) оси.

Если у вас получилось что-то вроде

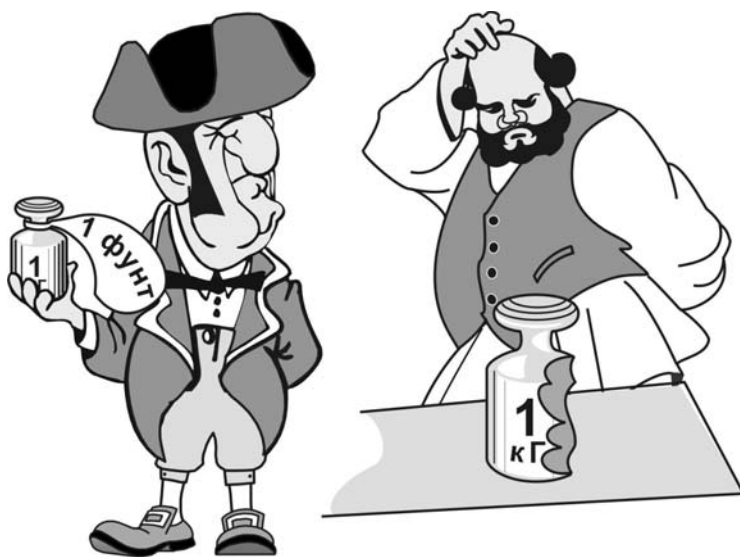
$$S^{\triangle} = S^{\square} + S^{\triangle} - S^{\square} = (2a)^2 + \left(\frac{2a \cdot 3a}{2} \right) - a^2 = 6a^2,$$

то с этим делом у вас все в порядке.

Продолжим. *Масса* (обычно обозначают буквой «*m*») – характеризует инертность тела, измеряется в килограммах (кг). Но не путайте **массу** и **вес**!

Вот он-то зависит от того, где взвешивают предмет – так на Луне он будет весить примерно в шесть раз меньше, чем на Земле, а в глубоком космосе не будет весить ничего. Масса же во всех случаях неизменна.

Сила (обозначается «*F*», «*P*», «*Q*», «*N*» и другими буквами) представляет меру взаимодействия твердых тел. Чаще всего ее задают в ньютонах (*H*), килоньютонах (*kH*, $1 \text{ kH} = 10^3 \text{ H}$) или меганьютонах (*MH*, $1 \text{ MH} = 10^3 \text{ kH} = 10^6 \text{ H}$) – в международной системе измерений СИ – или в килограммах (*кГ*, *кгс*, что означает килограмм силы), граммах (*г*, $1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кгс}$), тоннах (*т*, $1 \text{ т} = 10^3 \text{ кгс}$) – если используется так называемая техническая система единиц. Таким образом, 1 ньютон – это сила, сообщаящая телу массой 1 килограмм ускорение 1 метр в секунду за секунду ($1 \text{ H} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – в соответствии со вторым законом Ньютона). (Интересно, откуда наш Наставник вообще слышал про Ньютона?). С силой же 1 кгс тело массой 1 кг притягивается Землей – это и есть вес тела ($1 \text{ кгс} = 1 \text{ кг} \cdot 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cong 10 \text{ H}$).



Часто студенты задают вопрос: «В какой же системе единиц делать расчеты? – так это абсолютно все равно, хоть в *фунтах* и *дюймах* ($1 \text{ фунт} \cong 0,4536 \text{ кг}$, $1 \text{ дюйм} = 25,4 \text{ мм}$), лишь бы **система была одна и та же**. Пользуются же англичане, американцы, австралийцы этими странными фунтами, футами, дюймами уже не одну сотню лет и ущербными себя по этой причине отнюдь не чувствуют.

2 НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Продолжим наши воспоминания «геометрического» толка. И касаться они будут некоторых полезных в сопроаме свойств треугольника и простейших тригонометрических функций.

Основными элементами произвольного треугольника (рис. 2) являются: *стороны* *a*, *b*, *c*; *высота* *h* – отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону или ее продолжение; *медиана* *m* – отрезок,

соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной ей стороны; *биссектриса* s – прямая, делящая внутренний угол треугольника α пополам. Горизонтальная линия, проходящая через центр тяжести фигуры, делит ее высоту в отношении 2:1, считая от вершины (см. рис. 2).

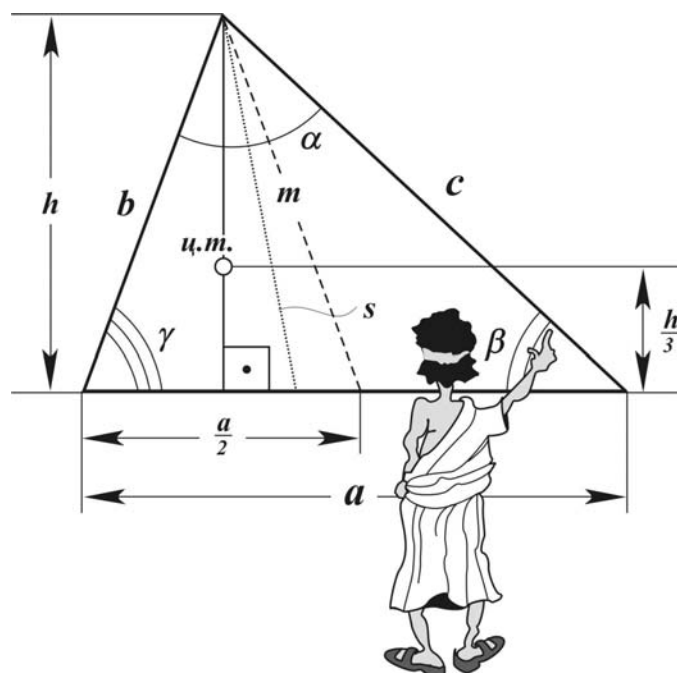


Рис. 2. Произвольный треугольник и его основные элементы

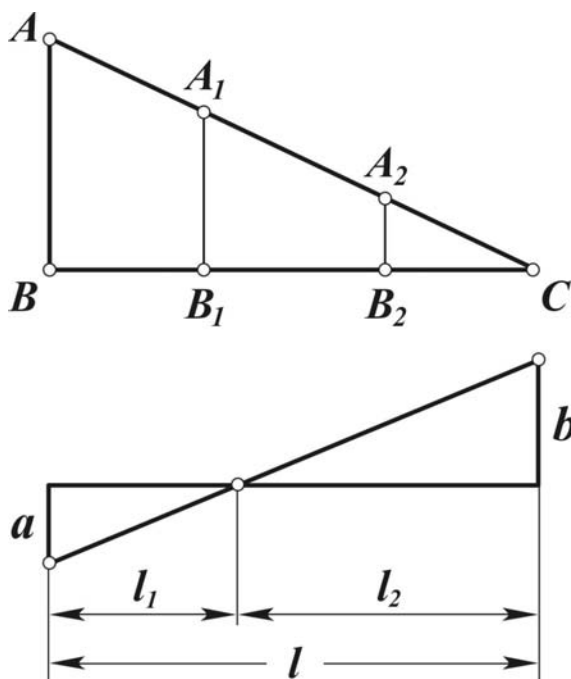


Рис. 3. К определению подобия треугольников

Горизонтальная линия, проходящая через центр тяжести фигуры, делит ее высоту в отношении 2:1, считая от вершины (см. рис. 2).

При анализе распределения внутренних усилий в теле частенько приходится использовать некоторые свойства *подобных треугольников*.

Два треугольника подобны, если

– два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника;

– две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны;

– три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого.

На рис. 3 треугольники BAC , B_1A_1C , B_2A_2C подобны между собой (каждый каждому); то же самое можно сказать и о двух треугольниках со сторонами a , l_1 и b , l_2 .

Предположим, что стороны a , b , а также сумма l двух других сторон известны. Необходимо определить размеры l_1 , l_2 каждой из этих сторон.

Поскольку рассматриваемые треугольники подобны (причем по всем трем признакам), справедливо равенство

$$\frac{a}{l_1} = \frac{b}{l - l_1}, \text{ откуда}$$

$$l_1 = \frac{al}{a + b}, \quad l_2 = l - l_1.$$

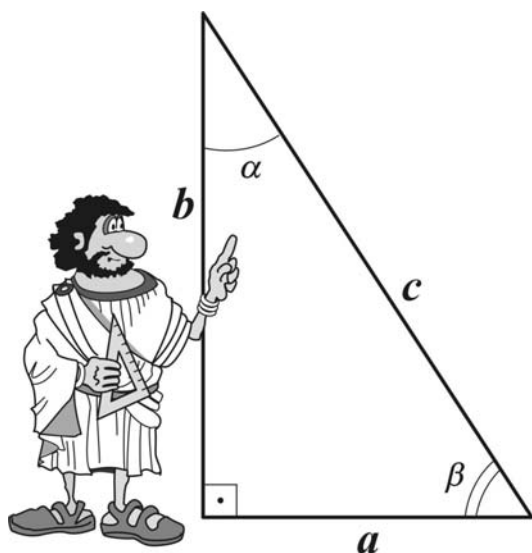


Рис. 4. Прямоугольный треугольник

И уж конечно же, никакие достижения в будущем невозможны без знания **тригонометрических функций**, которые обычно вводят с помощью прямоугольного треугольника (как вы помните, стороны a , b называются *катетами*, c – *гипотенузой*; угол между катетами является *прямым*, т.е. составляет 90° – рис. 4). Стороны a , b , c такого треугольника связаны теоремой Пифагора – достойнейшего сына нашей славной Эллады:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Итак, отношения катетов к гипотенузе и отношение катетов между собой представляют:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c} \text{ – синус угла } \alpha \text{ (косинус угла } \beta);$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c} \text{ – косинус угла } \alpha \text{ (синус угла } \beta);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} \text{ – тангенс угла } \alpha \text{ (котангенс угла } \beta);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = (\operatorname{tg} \alpha)^{-1} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \text{ – котангенс угла } \alpha \text{ (тангенс угла } \beta).$$

Из этих выражений следует практически полезный вывод: если прямоугольный треугольник задан своими сторонами, то для определения той или иной тригонометрической функции любого его угла вовсе необязательно знать величину самого угла.

И еще несколько часто используемых тригонометрических соотношений:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

На основе двух последних выражений нетрудно получить зависимости для синуса и косинуса двойного угла, попросту положив $\alpha = \beta$. Кроме того, в любом треугольнике (см. рис. 2) выполняются следующие равенства:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ – теорема синусов;}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \text{ – теорема косинусов.}$$

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЗАИМОСВЯЗИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ

А еще нам нужно поговорить о соотношениях, связывающих функцию одной переменной с ее производной (должно быть, вы помните, что саму функцию по отношению к своей производной называют *первообразной*). Для удобства восприятия воспользуемся, как и прежде, геометрической интерпретацией этих закономерностей.

Пусть в пространстве $x \sim y$ задана, скажем, линейная функция $f(x)$ вида $y = ax + b$. Первообразную функцию $F(x)$ получают путем *интегрирования* заданной (рис. 5):

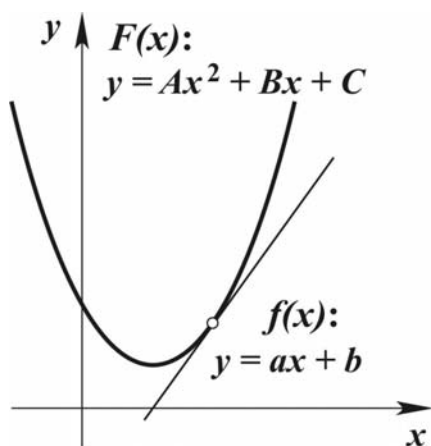


Рис. 5. Графики исходной линейной и соответствующей ей первообразной функций

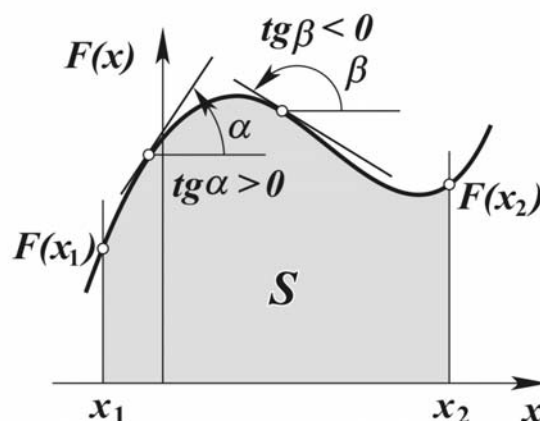


Рис. 6. К пояснению геометрического смысла интеграла и производной

$$F(x) = \int (ax + b) dx = Ax^2 + Bx + C, \quad \text{где } A = \frac{a}{2}, \quad B = b;$$

C – константа интегрирования, определяется исходя из граничных условий. Таким образом, зная только исходную функцию $f(x)$, первообразную $F(x)$ можно найти лишь **с точностью до константы**.

Таблицу *неопределенных интегралов*, хотя бы самых простых, вы наверняка заучивали в школе. Если же она «потускнела» в памяти – не беда; ее всегда можно посмотреть в различных справочниках по математике. Кстати, один из них – достаточно полный и вполне доходчивый – приведен в списке литературы в конце пособия.

Указав область определения аргумента $x - x_1 \leq x \leq x_2$ – можно рассмотреть *определенный интеграл* и найти его *величину в пределах от x_1 до x_2* . Геометрический смысл определенного интеграла иллюстрируется рис. 6 – его величина численно равна площади S под кривой на указанном отрезке:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (ax + b) dx = A(x_2^2 - x_1^2) + B(x_2 - x_1)$$

(как известно, интеграл суммы может быть представлен суммой интегралов). Константа C определяется величиной $F(x_1)$ при $x = x_1$ (или любым другим значением $F(x_i)$ при $x = x_i$ в интервале $x_1 \leq x \leq x_2$).

Нетрудно догадаться, что получение производной – операция, обратная интегрированию. Именуется она *дифференцированием*, например,

$$F(x)' \equiv \frac{d(Ax^2 + Bx + C)}{dx} = 2Ax + B = ax + b \quad (a = 2A).$$

В результате дифференцирования уравнения параболы получено исходное уравнение прямой (см. рис. 5).

Таблицу производных простых и тригонометрических функций, а также технику дифференцирования можно освежить в памяти с помощью уже упоминавшегося справочника.

Геометрический смысл производной поясняется рис. 5, 6 – это **тангенс угла наклона касательной** к графику функции $F(x)$. На рис. 6 хорошо видно: если значение этой величины ($\operatorname{tg} \alpha > 0$) **положительно** – функция **возрастает**, а если **отрицательно** ($\operatorname{tg} \beta < 0$) – **убывает**. По характеру изменения знака производной можно судить и о типе достигаемого экстремума (как локального, так и глобального): смена положительного значения отрицательным указывает на существование максимума (обозначается символом «max»), наоборот – минимума (min).

Использование взаимосвязи производной и первообразной покажем на примере.

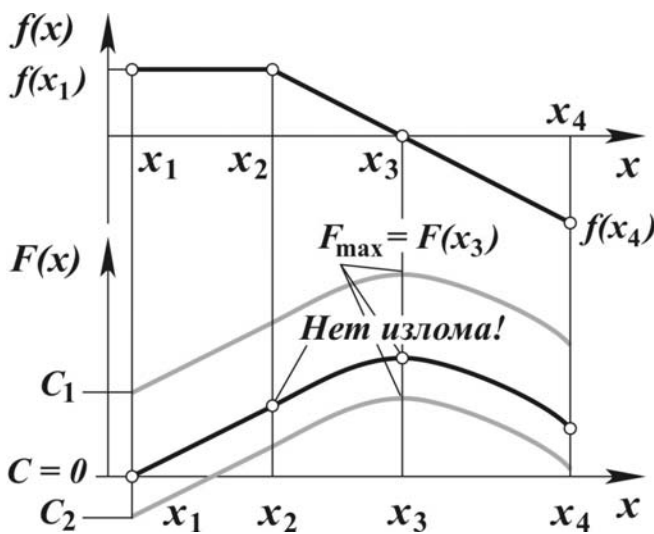


Рис. 7. Получение первообразной функции по заданному графику ее производной

Пример 2. Найдем вид функции $F(x)$ на замкнутом интервале $[x_1, x_4]$ ($x_1 \leq x \leq x_4$) по заданному графику ее производной $f(x)$ (рис. 7).

На отрезке $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ постоянна и положительна, соответственно, первообразная $F(x)$ представляет возрастающую линейную функцию. Ее изменение на данном отрезке равно

$\Delta F_{1,2} = F(x_2) - F(x_1) = f(x_1)(x_2 - x_1)$ – вспоминаем о геометрическом смысле интеграла. От какого значения его откладывать? Поскольку гранич-

ные условия в примере не заданы, то и величина $F(x_1)$ оказывается неопределенной. Увы, наш ответ будет получен лишь с точностью до константы. На рис. 7 показаны несколько из множества возможных вариантов.

На следующем отрезке $[x_2, x_4]$ производная $f(x)$ описывается одним и тем же линейным законом, стало быть, ее первообразная – парабола. Заметим к тому же, что на интервале $[x_2, x_3]$ $f(x)$ положительна, а на $[x_3, x_4]$ – отрицательна. Это означает, во-первых, что при $x = x_3$ функция $F(x_3)$ достигает экстремума (в нашем случае, максимума), во-вторых, для определения значения $F_{\max}$ приращения функции придется подсчитывать по участкам:

$$\Delta F_{\max} \equiv \Delta F_{1,3} = \Delta F_{1,2} + \frac{1}{2}f(x_2)(x_3 - x_2) \quad (\text{очевидно, } f(x_2) = f(x_1));$$

$$\Delta F_{1,4} = \Delta F_{1,3} - \frac{1}{2}f(x_4)(x_4 - x_3),$$

где $f(x_4) = f(x_2) \frac{x_4 - x_3}{x_3 - x_2}$ на том основании, что треугольники $(f(x_2), x_2, x_3)$ и $(f(x_4), x_3, x_4)$ подобны (см. предыдущий раздел).

Обратите внимание, что переход от прямой к параболе при $x = x_2$ происходит плавно, без излома – значения производной бесконечно близко слева и справа к границе двух участков равны, следовательно, равны тангенсы углов и сами углы наклона касательной к графику кривой.

Остается лишь решить вопрос, как – выпуклостью вверх или вниз – следует изобразить параболу. Ответ на него дает анализ изменения величины производной $f(x)$. Как видно (рис. 7), по мере приближения к координате $x = x_3$ величина $f(x)$ и соответствующий ей угол наклона касательной уменьшаются, в точке $x = x_3$ становятся равными нулю (касательная горизонтальна), при удалении же от нее модуль $|f(x)|$, наоборот, увеличивается. Даже не прибегая к помощи второй производной, нетрудно понять, каков характер нашей кривой – она имеет отрицательную кривизну, то есть, направлена выпуклостью вверх, как и показано на рисунке.

4 СИЛА В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ

Понятие *силы* уже упоминалось ранее, в разделе 1. Теперь наша задача – вспомнить, как с ней работают, учитывая, что сила суть объект *векторный*, а не какое-то там число. (Кое-кто из моих знакомых пренебрежительно называет число *скаляром* – но это термин, а не обидное прозвище!). Вообще-то, в повседневной расчетной практике с векторными величинами возиться не очень приятно. Ведь чтобы определить вектор, нужно задать его длину (говорят, модуль вектора) и его положение в пространстве, например, с помощью направляющих косинусов. Как видите, величины получаются разно-

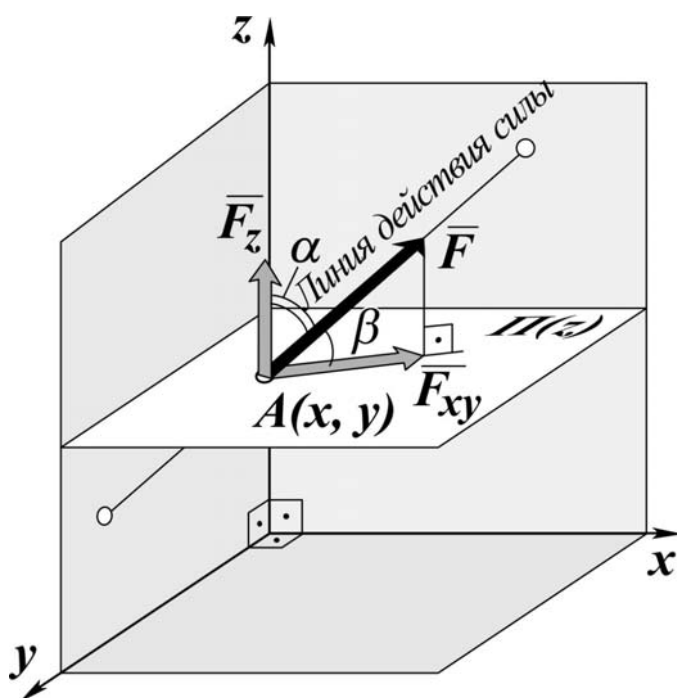


Рис. 8. Разложение пространственной силы на составляющие вдоль одной из осей и на плоскость

родные, поэтому гораздо удобнее представить вектор его компонентами, разложив (что чаще всего и делается) по ортогональным (взаимно перпендикулярным) координатным осям (рис. 8).

Пусть в пространстве ортогональных координатных осей x, y, z задана сила $\vec{F}$. Углы между вектором силы $\vec{F}$ и осью z , а также плоскостью Π равны, соответственно, α и β (рис. 8). Представим для начала эту силу двумя взаимно перпендикулярными составляющими. Компонента $\vec{F}_z$ определяется просто – проекцией вектора $\vec{F}$ на вертикальную ось:

$$|\vec{F}_z| = |\vec{F}| \cos \alpha = |\vec{F}| \sin \beta$$

($|\vec{F}|$ или просто F – модуль вектора); аналогично второй вектор – проекцией заданного на плоскость Π :

$$|\vec{F}_{xy}| = |\vec{F}| \cos \beta = |\vec{F}| \sin \alpha.$$

Подобные же действия можно произвести и в плоскости. Поскольку справедливо векторное равенство (рис. 9)

$$\vec{F}_{xy} = \vec{F}_x + \vec{F}_y,$$

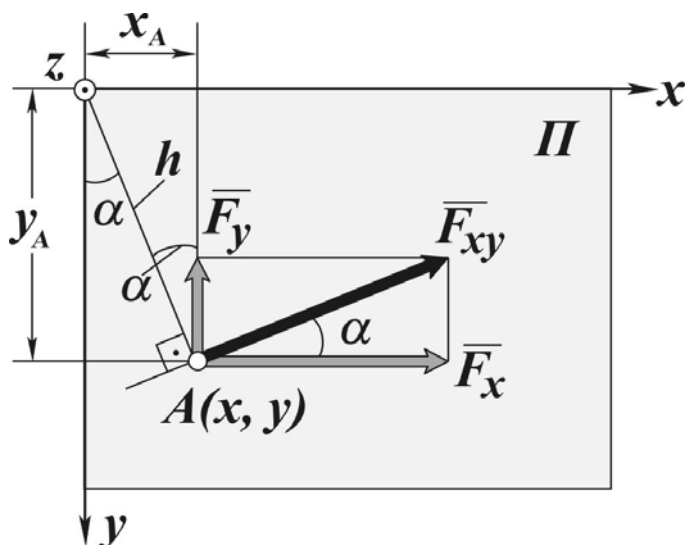


Рис. 9. Разложение силы в плоскости на составляющие вдоль координатных осей

то каждая составляющая может быть найдена как катет прямоугольного треугольника, построенного на векторах-компонентах как на сторонах (см. раздел 2):

$$|\vec{F}_x| = |\vec{F}_{xy}| \cos \alpha, \quad |\vec{F}_y| = |\vec{F}_{xy}| \sin \alpha.$$

Кстати, при работе с плоской системой сил, параллельных осям координат, знак вектора «—» над компонентами обычно не ставят – их направления и так понятны.

- Что-то от всей этой теории у нас в головах туман образовался, как в Эгейском море. Может, все сказанное Вы поясните на примере...



– Однако, как сказал один германец, личность весьма романтическая [Иоганн Вольфганг Гёте]: «Теория суха, мой друг, но древо жизни вечно зеленеет...». При хорошей теории и практика расцветает.

Пример 3. Рассмотрим в качестве примера широко распространенный еще со времен древней Греции и до наших дней узел некоторых грузовых устройств – ригель 1 с подкосом 2 (рис. 10), образующих простейшую ферму.

Вес груза F , приложенного в узле A , изобразим в виде сосредоточенной силы (схема на рис. 10). Разложим ее на составляющие по направлениям элементов (стер-

жней) фермы. Спроектируем вектор $\vec{F}$ вначале на ось подкоса 2:

$$F_2 = F \sin 30^\circ = \frac{1}{2} F,$$

затем на ось ригеля 1, совпадающую с осью x :

$$F_1 = F \sin 0^\circ = 0.$$

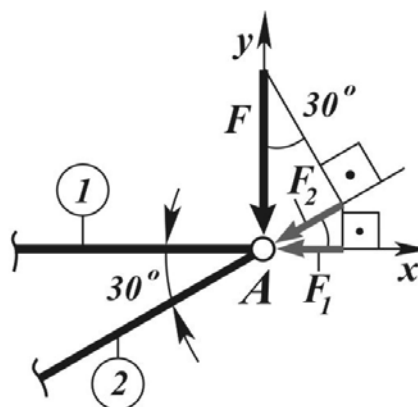
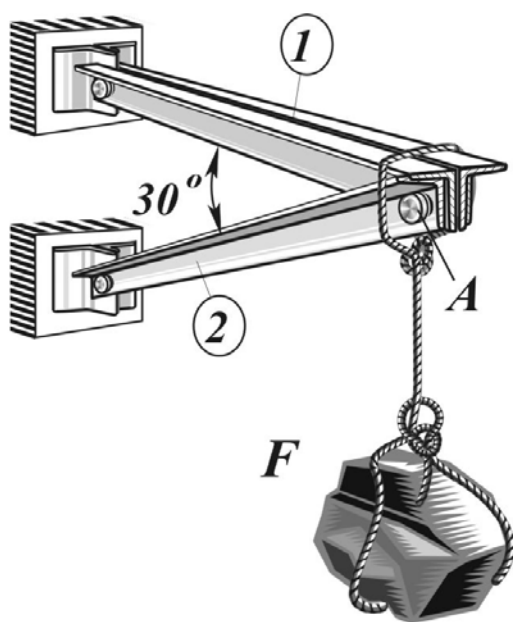


Рис. 10. Простое приспособление для удержания груза и схема нагружения узла A

– Так что же получается, подкос нагружен только вполсилы, а ригель совсем не работает? Тогда зачем он нужен?

– Не совсем так. Если составляющую F_2 , в свою очередь, спроектировать на ось x , то получим

$$F_1 = F_2 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} F \cong 0,433 F.$$

– Это и будут нагрузки на стержни?

– Нет, это всего лишь составляющие внешней нагрузки. Выберем другие оси – получим другие значения составляющих. Усилия же в стержнях N_i следует определять исходя из **условия равновесия** (в нашем случае, узла A). И окажутся они гораздо больше – $N_1 = \sqrt{3} F$, $N_2 = 2F$. Но об этом мы поговорим чуть позже, когда приступим к повторению элементов раздела «Статика» теоретической механики.

5 МОМЕНТ СИЛЫ И ПАРЫ СИЛ

Другим, совершенно самостоятельным, не сводящимся к силе, объектом силового характера является *момент*. Он может быть связан как с силой, так и с парой сил.

Момент силы F_{xy} относительно оси z (см. рис. 8, 9) определяется произведением величины силы на плечо h – длину перпендикуляра, опущенного из точки, принадлежащей оси, на линию действия силы (может быть, поэтому иногда можно встретить выражение «момент силы относительно точки» или «момент силы относительно центра»):

$$M_z(F_{xy}) = F_{xy} h.$$

Нетрудно видеть, что момент измеряется в *Нм*. Момент считается **положительным**, если при взгляде с конца оси поворот объекта под действием этой силы происходит **против часовой стрелки** и **отрицательным**, если **наоборот**.

Момент силы относительно оси равен нулю, если

- сила параллельна оси, то есть, ее проекция на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю;
- сила пересекает ось, то есть, плечо ее проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью равно нулю.

Момент силы относительно оси не изменится, если силу переместить вдоль линии ее действия (т. е., вектор силы – *скользящий вектор*).

Часто оказывается, что момент удобнее подсчитывать, используя составляющие F_x , F_y силы F_{xy} и их плечи x_A , y_A (см. рис. 9), которые, в отличие от h , обычно найти легче:

$$\begin{aligned} M_z(F_{xy}) &= F_y x_A + F_x y_A = F_{xy} \sin \alpha \cdot h \cdot \sin \alpha + F_{xy} \cos \alpha \cdot h \cdot \cos \alpha = \\ &= F_{xy} h (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = F_{xy} h \cdot 1 \quad (\text{см. раздел 2}). \end{aligned}$$

Как видно, результат получился таким же, как было показано выше.

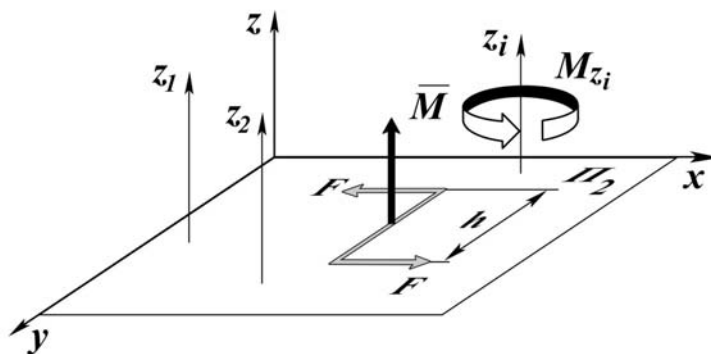
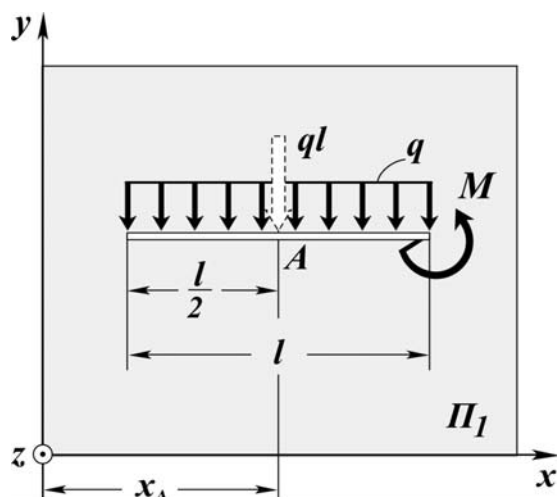


Рис. 11. К определению момента
распределенной нагрузки

Рис. 12. Пара сил и момент пары сил в плоскости

При решении задач сопротивления материалов приходится также находить момент *распределенной* силы (ее размерность – $\frac{H}{m}$). В самом простом случае – **равномерно распределенной** нагрузки постоянной интенсивности q на участке длиной l в плоскости – момент ее относительно некоторой оси z определяется произведением ее результирующей ql , помещенной в середину участка, на плечо результирующей x_A относительно выбранной оси – $ql \cdot x_A$ (рис. 11).

Вектор *момента пары сил* $\bar{M}$ в плоскости есть *свободный вектор*, модуль которого определяется произведением одной из сил F пары на плечо пары h (рис. 12):

$$M_z = M_{z_1} = M_{z_2} = M_{z_i} = Fh.$$

Иногда пару сил изображают в виде кольцевой стрелки (см. рис. 12), а в плоскости – так, как показано на рис. 11 справа.

Правило же знаков для момента пары совпадает с вышеприведенным правилом для момента силы.

6 УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ: ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

– А-а-а, вот и обещанные условия равновесия...

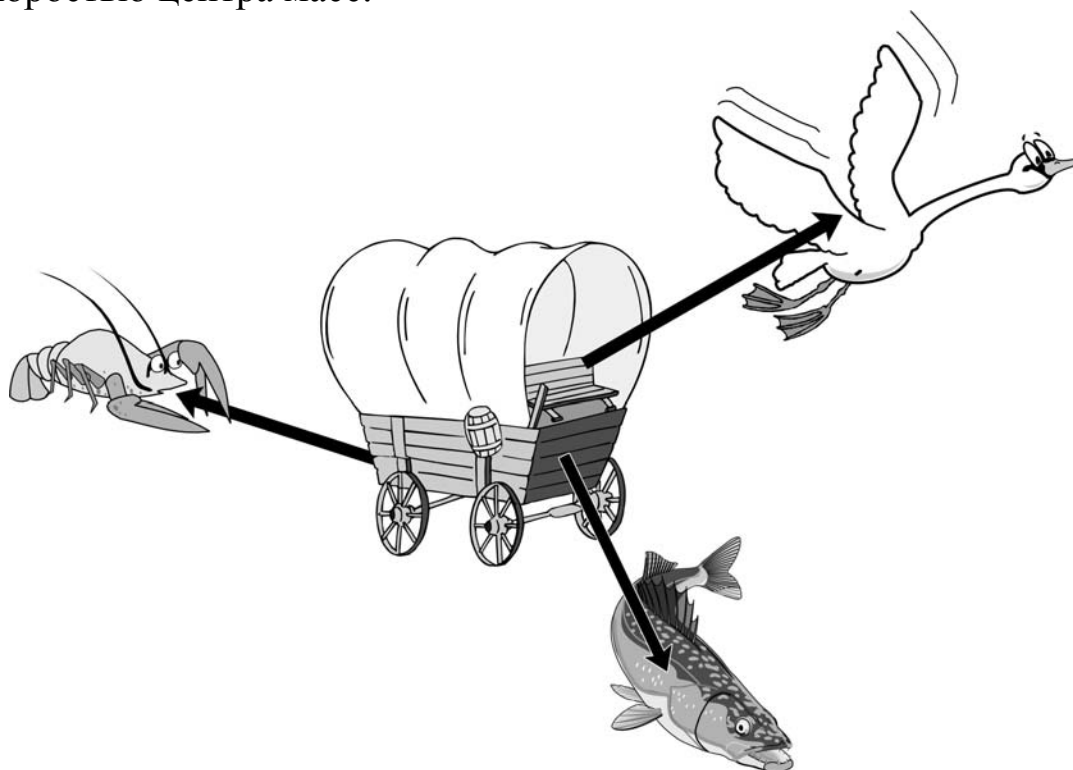


– Да, дошел, наконец, черед и до них. Прежде всего, крепко-накрепко следует запомнить, что любые расчеты – на прочность, на жесткость – можно начинать, лишь убедившись, что рассматриваемая конструкция пребывает в **равновесии**.

Как известно из курса «Теоретическая механика», твердое тело находится в *равновесии*, если оно *остается в покое* (неподвижно) *или движется прямолинейно и равномерно* (то есть, с постоянной скоростью). Это, в свою очередь, означает, что действующая на это тело система усилий является *уравновешенной*.

Уравновешенна ли данная **система сил** можно определить по ряду признаков:

- движущееся в плоскости тело движется прямолинейно и равномерно;
- вращающееся тело вращается с постоянной угловой скоростью;
- движущееся в плоскости тело движется с постоянной скоростью центра масс и постоянной угловой скоростью;
- колесо, катящееся по неподвижной поверхности, катится с постоянной скоростью центра масс.



Одна из наиболее известных уравновешенных систем изображена на рисунке, помните – «... а воз и ныне там» – объект вообще неподвижен и **до сих пор поκειται где-то там**.

Система сил $\{\overline{F}_i\}_n$ (n – количество сил в системе), приложенная к телу, называется **уравновешенной** или, еще говорят, эквивалентной нулю (обозначается так: $\{\overline{F}_i\}_n \sim \overline{0}$) тогда и только тогда, когда **свободное тело** под действием этой системы сил находится **в равновесии**.

Условия, которым должны удовлетворять приложенные к некоторому объекту силы, чтобы он находился в равновесии, называются **условиями равновесия** системы сил. В общем виде эти условия формулируются следующим образом.

Система сил, приложенных к твердому телу, уравновешена тогда и только тогда, когда ее главный вектор сил $\overline{R}$ и вектор главного момента $\overline{M}$ относительно произвольного центра равны нулю:

$$\begin{cases} \overline{R}\{\overline{F}_i\}_n = \overline{0}; \\ \overline{M}\{\overline{F}_i\}_n = \overline{0}. \end{cases} \quad (1)$$

Условия равновесия в **аналитической** форме получаются путем проецирования двух векторных уравнений (1) на оси координат.

В теоретической механике используется следующая **классификация** приложенных к твердому телу **систем сил**.

В соответствии с ней система сил может быть *пространственной, плоской* или *линейной*. Кроме того, как пространственная, так и плоская системы сил могут быть *сходящимися, параллельными* или *произвольными*.

Сходящейся называют такую систему, линии действия всех сил которой **пересекаются в одной точке**, называемой *точкой схода*.

Параллельной называют систему сил, линии действий всех сил которой **параллельны одной и той же оси**.

Система сил называется *линейной*, если **линии действия всех ее сил совпадают с какой-либо осью**.

Если система сил не является ни сходящейся, ни параллельной, то есть, все силы системы направлены **произвольно в пространстве или плоскости**, система сил считается *произвольной*.

Рассмотрим наиболее распространенные в расчетах на прочность и жесткость варианты этих систем.

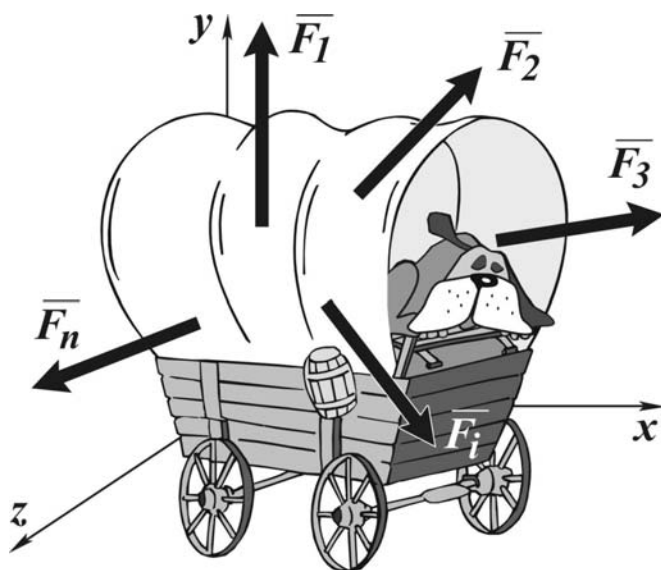


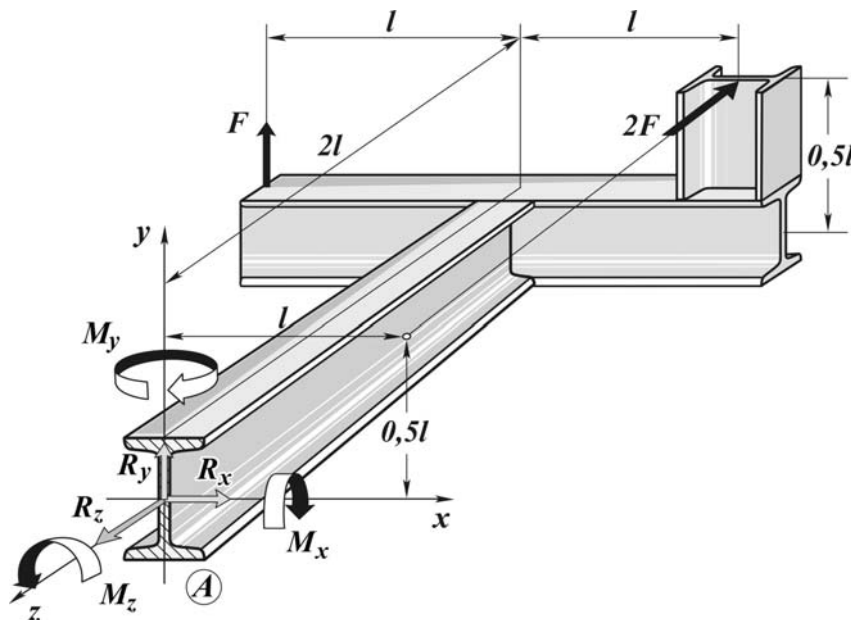
Рис. 13. Произвольная пространственная система сил

Аналитические условия равновесия **пространственной произвольной системы сил** (рис. 13) получим, спроектировав векторные уравнения (1) на три координатные оси. В результате вместо **двух векторных** придется иметь дело с **шестью скалярными** уравнениями (такой вот выходит «обмен»):

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x = \sum F_{ix} = 0; \\ \mathcal{R}_y = \sum F_{iy} = 0; \\ \mathcal{R}_z = \sum F_{iz} = 0; \\ \mathcal{M}_x = \sum M_x(\bar{F}_i) = 0; \\ \mathcal{M}_y = \sum M_y(\bar{F}_i) = 0; \\ \mathcal{M}_z = \sum M_z(\bar{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Итак, для **равновесия твердого тела** под действием **пространственной произвольной системы сил** необходимо, чтобы **три проекции главного вектора** системы сил (суммы проекций всех сил) на три координатные оси и **три проекции вектора главного момента** системы сил (суммы моментов всех сил вокруг трех координатных осей) были **равны нулю**.

Пример 4. Полагая, что заданная пространственная рама находится в равновесии под действием показанных на рис. 14 сосредоточенных сил и пар сил,



сил, определим приложенные в ближнем к нам сечении **A** силы (в долях F) и пары сил (в долях Fl).

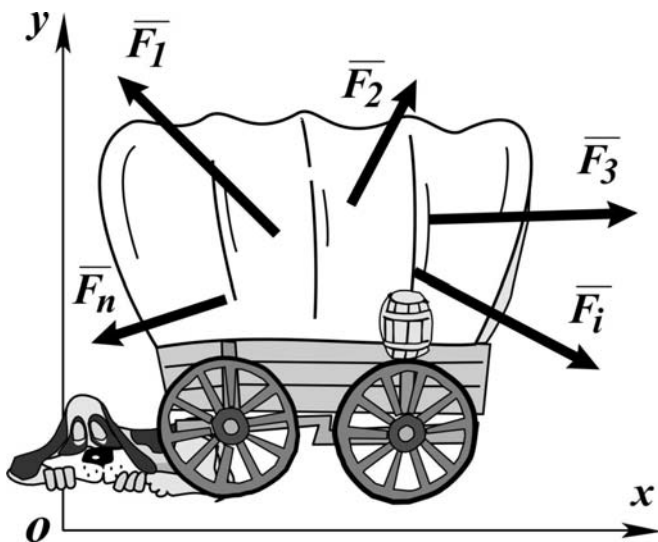
Воспользуемся для этого условиями равновесия в виде (2):

Рис. 14. Нагружение пространственной рамы произвольной системой усилий (сил и пар сил)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^5 F_{ix} &= R_x + K = 0, \quad R_x = 0; \\
\sum_{i=1}^5 F_{iy} &= R_y + F = 0, \quad R_y = -F; \\
\sum_{i=1}^5 F_{iz} &= R_z - 2F = 0, \quad R_z = 2F; \\
\sum_{i=1}^5 M_x(F_i) + \sum_{j=1}^3 M_j &= -M_x + F \cdot 2l - 2F \cdot 0,5l = 0, \quad M_x = Fl; \\
\sum_{i=1}^5 M_y(F_i) + \sum_{j=1}^3 M_j &= -M_y + 2F \cdot l = 0, \quad M_y = 2Fl; \\
\sum_{i=1}^5 M_z(F_i) + \sum_{j=1}^3 M_j &= M_z - Fl = 0, \quad M_z = Fl.
\end{aligned}$$

Полученное решением второго уравнения отрицательное значение R_y означает, как нетрудно догадаться, что истинное направление этой силы противоположно изображенному на рисунке (рис. 14).

Однако чаще, по всей видимости, вы будете встречаться с **плоской произвольной системой сил** (а студенты, изучающие техническую или прикладную механику, именно с ней и будут иметь дело).



Аналитические условия равновесия такой системы сил (рис. 15) следуют как частный случай из условий равновесия (2) пространственной произвольной системы сил. Достаточно учесть, что проекции сил, лежащих в плоскости xOy , на ось z и моменты этих сил относительно осей x и y тождественно равны нулю:

Аналитические условия равновесия такой системы сил (рис. 15) следуют как частный случай из условий равновесия (2) пространственной произвольной системы сил. Достаточно учесть, что проекции сил, лежащих в плоскости xOy , на ось z и моменты этих сил относительно осей x и y тождественно равны нулю:

Рис. 15. Произвольная плоская система сил

$$\begin{cases} \mathcal{R}_z = \sum F_{iz} \equiv 0; \\ \mathcal{M}_x = \sum M_x(\bar{F}_i) \equiv 0; \\ \mathcal{M}_y = \sum M_y(\bar{F}_i) \equiv 0. \end{cases}$$

Кроме того, вместо суммы моментов всех сил относительно оси z зачастую удобнее записывать сумму моментов относительно произвольного цент-

ра в плоскости xOy , (который, в принципе, представляет точку пересечения этой плоскости с некоторой ортогональной осью). Таким образом, **первая** форма аналитических условий равновесия твердого тела под действием плоской произвольной системы сил имеет вид трех скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x = \sum F_{ix} = 0; \\ \mathcal{R}_y = \sum F_{iy} = 0; \\ \mathcal{M}_O = \sum M_O(\bar{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Это означает, что для **равновесия твердого тела** под действием **плоской произвольной системы сил** необходимо, чтобы две **проекции главного вектора** системы сил (суммы проекций всех сил) на две координатные оси, лежащие в плоскости действия сил, и **сумма моментов всех сил** (главный алгебраический момент системы сил) относительно произвольного центра в плоскости были **равны нулю**.

Вторая форма аналитических условий равновесия плоской произвольной системы сил имеет вид

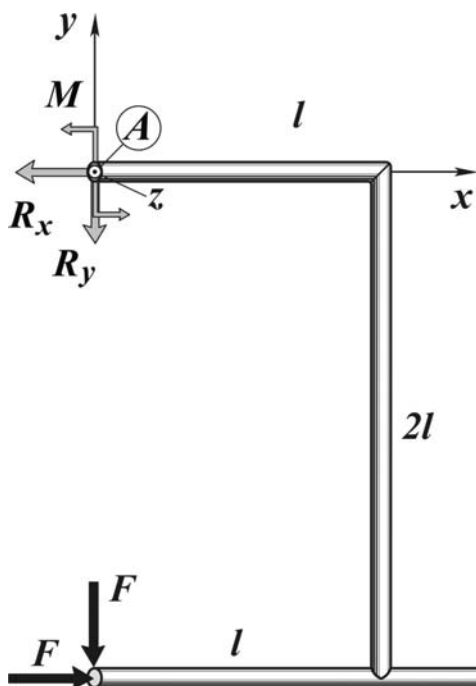
$$\begin{cases} \mathcal{R}_x = \sum F_{ix} = 0; \\ \mathcal{M}_A = \sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \\ \mathcal{M}_B = \sum M_B(\bar{F}_i) = 0; \end{cases} \quad \overline{Ox} \perp \overline{AB}. \quad (4)$$

Смысл этих уравнений вполне прозрачен: **суммы моментов всех сил** (главные алгебраические моменты системы сил) относительно двух центров ***A*** и ***B*** и **проекция главного вектора** системы сил (сумма проекций всех сил) на координатную ось, **не перпендикулярную** прямой ***AB***, должны быть **равны нулю**.

Третья форма аналитических условий равновесия плоской произвольной системы сил выглядит так:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_A = \sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \\ \mathcal{M}_B = \sum M_B(\bar{F}_i) = 0; \\ \mathcal{M}_C = \sum M_C(\bar{F}_i) = 0; \end{cases} \quad C \notin \overline{AB}. \quad (5)$$

То есть, **суммы моментов** всех сил (главные алгебраические моменты системы сил) относительно трех центров ***A***, ***B*** и ***C***, не лежащих на одной прямой, должны быть **равны нулю**.



Пример 5. Решим задачу, аналогичную рассмотренной в Примере 4, для заданной рис. 16 плоской рамы. Как и прежде, определим приложенные в сечении A (которое на этот раз расположено слева сверху) усилия R_x , R_y , M в долях F и Fl , соответственно.

Используем первую форму условий равновесия (3) плоской произвольной системы усилий:

Рис. 16. Плоская рама, нагруженная в своей плоскости произвольной системой усилий (сил и пар сил)

$$\sum_{i=1}^5 F_{ix} = -R_x + F = 0, \quad R_x = F;$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = -R_y - F - 2F = 0, \quad R_y = -3F;$$

$$\sum_{i=1}^5 M_z(F_i) + M = -2F \cdot 2l + F \cdot 0 + F \cdot 2l + M = 0, \quad M = 2Fl.$$

Как и в предыдущем примере, отрицательное значение R_y соответствует направлению силы, противоположному изображенному на рисунке.

Рассмотрим частный случай плоской системы сил – **сходящуюся систему сил**, лежащих в плоскости.

Аналитические условия равновесия плоской сходящейся системы сил (рис. 17) вытекают из условий равновесия плоской произвольной системы сил. Надо лишь учесть, что при выборе точки схода A в качестве центра моментов главный алгебраический момент тождественно будет равен нулю:

$$\mathcal{M}_A = \sum M_A(\bar{F}_i) \equiv 0.$$

В этом случае аналитические условия равновесия плоской сходящейся системы сил имеет вид двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_x = \sum F_{ix} = 0; \\ \mathcal{R}_y = \sum F_{iy} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

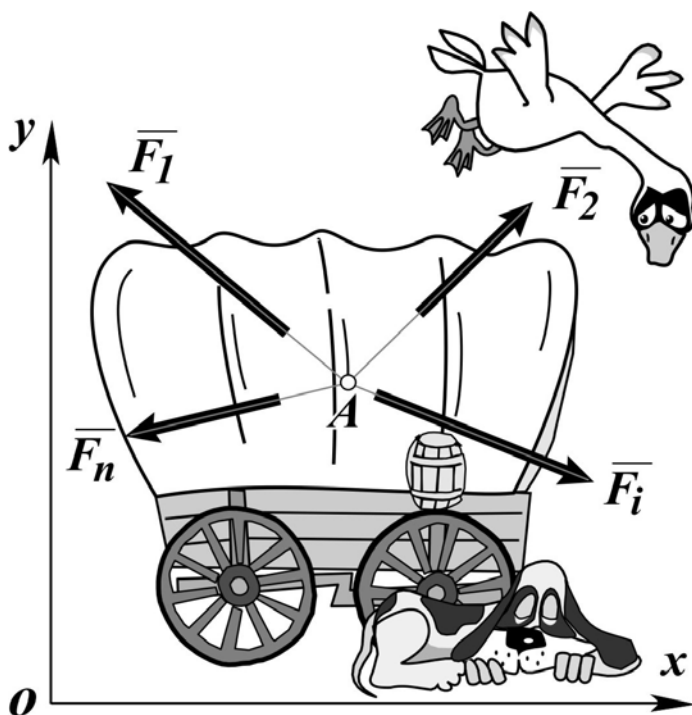


Рис. 17. Плоская сходящаяся система сил

Две проекции главного вектора системы сил (суммы проекций всех сил) на две координатные оси, лежащие в плоскости действия сил, должны быть **равны нулю**.

Пример 6. Вернемся к определению усилий в стержнях простейшей фермы, о чем уже заходил разговор в заключение Примера 3.

Вырежем узел A фермы и рассмотрим его равновесие (рис. 18). Обратите внимание, каким образом показаны силы N_1 и N_2 – они приложены **к сечениям** (в произвольном направлении вдоль оси «своего» стержня); но их никогда не изображают **на самих стержнях**. Условие равновесия плоской

системы сходящихся сил запишем двумя уравнениями в форме суммы проекций всех сил на ортогональные оси y и x (6):

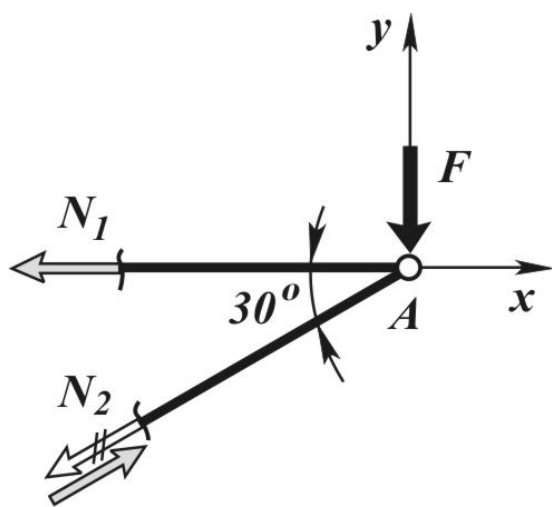


Рис. 18. Узел A находится в равновесии под действием внешней нагрузки и внутренних сил

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = -F - N_2 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = -N_1 - N_2 \cos 30^\circ = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $N_2 = -2F$, из второго – $N_1 = 2F \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}F$.

Как обычно, знак «минус» в значении силы N_2 означает, что направление этой силы первоначально было выбрано не-

верно. В общем, смысл знаков в ответе очень прост: «угадал – не угадал» (направление усилия).

Обратите внимание что, усилия, действующие в стержнях, значительно отличаются от составляющих внешней нагрузки вдоль осей этих стержней:

сравните: $F_2 = \frac{1}{2} F$, $F_1 \cong 0,433 F$ (см. Пример 3).

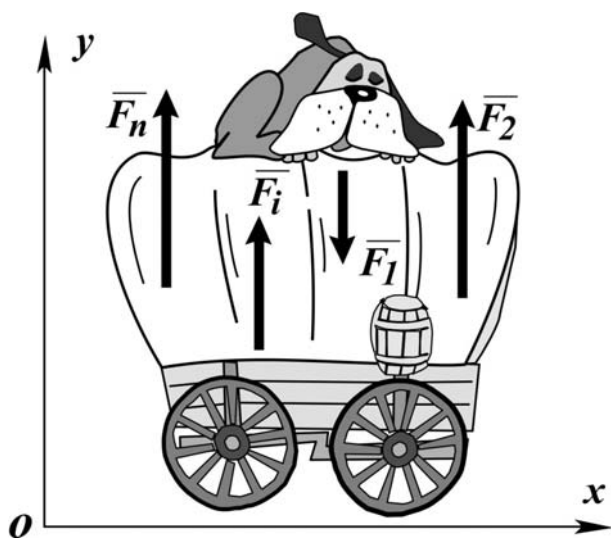


Рис. 19. Плоская система параллельных сил

И, наконец, условия равновесия **плоской системы параллельных сил** (рис. 19) в аналитическом виде получаются из условий равновесия плоской произвольной системы сил. Учтем, что проекции сил, параллельных оси y , на ось x тождественно равны нулю:

$$\mathcal{R}_x = \sum F_{ix} \equiv 0.$$

Таким образом, **первая** форма условий равновесия плоской параллельной системы сил в аналитическом виде описывается двумя скалярными уравнениями:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_y = \sum F_{iy} = 0; \\ \mathcal{M}_O = \sum M_O(\bar{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Суть этих уравнений, как видно, заключается в том, что **проекция главного вектора системы сил** (сумма проекций всех сил) на координатную ось, параллельную силам, и **сумма моментов всех сил** (главный алгебраический момент системы сил) относительно произвольного центра в плоскости должны быть **равны нулю**.

Вторая форма аналитических условий равновесия плоской системы параллельных сил имеет вид

$$\begin{cases} \mathcal{M}_A = \sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \\ \mathcal{M}_B = \sum M_B(\bar{F}_i) = 0; \end{cases} \quad \overline{AB} \nparallel \bar{F}_i. \quad (8)$$

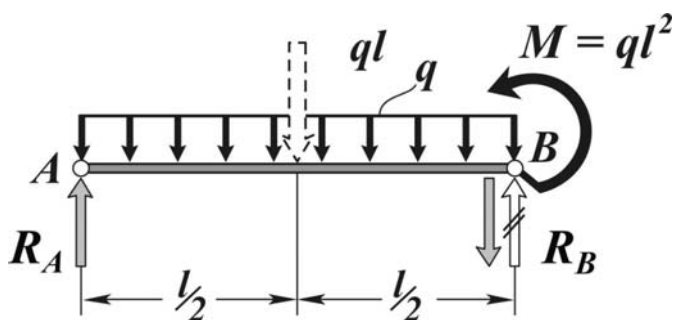


Рис. 20. Плоская система параллельных усилий: равномерно распределенная нагрузка и пара сил

То есть, **суммы моментов всех сил** (главные алгебраические моменты системы сил) относительно двух центров A и B , не лежащих на прямой, параллельной силам системы, должны быть **равны нулю**.

Пример 7. Определим (в долях ql) сосредоточенные силы R_A и R_B (рис. 20), приложенные к плоскому стержню AB , с помощью условий равновесия (8):

$$\sum_{i=1}^4 M_B(F_i) = -R_A \cdot l + ql \cdot 0,5l + ql^2 = 0;$$

$$R_A = 1,5ql;$$

$$\sum_{i=1}^4 M_A(F_i) = R_B \cdot l + ql^2 - ql \cdot 0,5l = 0;$$

$$R_B = -0,5ql$$

(см. «правку» на рис. 20).



Выполняя расчеты на прочность и жесткость, подобные действия применительно к разнообразным системам усилий приходится производить постоянно. В этом вы убедитесь, не только прочитав это пособие, но и в течение всего изучения нашего курса, поэтому работа с условиями равновесия должна быть доведена до совершенства – в этом залог будущих успехов в овладении предметом и только так можно стать истинным знатоком сопромата, подлинным мастером своего дела.

Ну и, завершая этот раздел, нельзя не упомянуть добрым словом одного славного галла по имени Луи, по прозвищу Пуансо. Он открыл крайне полезное для нашей науки свойство любой системы сил, приложенной к твердому телу. Благодарные потомки так и прозвали это свойство – **теорема Пуансо**.

Любая неуравновешенная система сил, приложенная к твердому телу, может быть приведена к произвольному центру O и заменена результирующей силой $\bar{R}$, равной главному вектору системы сил $\bar{\mathcal{R}}$ и результирующей парой сил с моментом $\bar{M}$, равным главному моменту системы сил $\bar{\mathcal{M}}$ относительно центра приведения:

$$\{\bar{F}_i\}_n \sim \{\bar{R}_O, \bar{M}_O\}, \text{ то есть, } \begin{cases} \bar{R}_O = \bar{\mathcal{R}}\{\bar{F}_i\}_n; \\ \bar{M}_O = \bar{\mathcal{M}}_O\{\bar{F}_i\}_n. \end{cases} \quad (9)$$

Из теоремы Пуансо следует **правило параллельного переноса силы** (рис. 21):

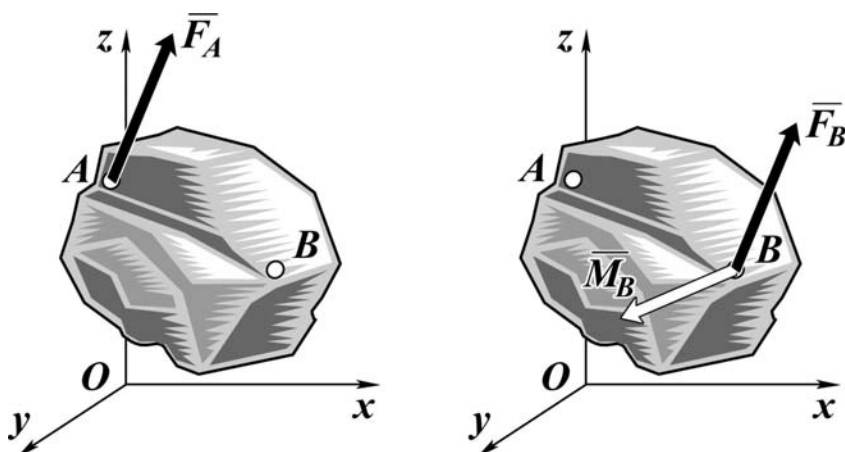


Рис. 21. К правилу параллельного переноса силы

Действие силы на тело не изменится при ее параллельном переносе, если к этой силе добавить пару сил с моментом, равным моменту исходной силы относительно ее новой точки приложения:

$$\overline{F_A} \sim \{ \overline{F_B}, \overline{M_B} \}, \text{ то есть, } \begin{cases} \overline{F_B} = \overline{F_A}; \\ \overline{M_B} = \overline{M_B}(\overline{F_A}). \end{cases}$$

- Уважаемый Наставник, скажите, наконец, что же это за предмет такой – СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ?

7. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ – ЧТО ЭТО?

- Ну, если коротко, *сопротивление материалов – это наука о прочности, жесткости и устойчивости деталей машин и элементов конструкций.*
- А прочность и жесткость – это...



О ужас! Прочность конструкции нарушена!

Под *прочностью* в широком смысле понимают способность конструкции или отдельных ее частей выдерживать заданную нагрузку **не разрушаясь** и к тому же без проявления **остаточных деформаций, нарушающих работоспособность изделия.**



Конструкция осталась цела, но ее жесткость явно недостаточна. Все равно ужас!

Жесткость – способность конструкции не менять **существенно** свои размеры и форму под действием внешних усилий (в отличие от, например, теоретической механики, где рассматриваются **абсолютно жесткие** тела, сопроматчики работают с твердым **деформируемым** телом).

Устойчивость – способность конструкции или ее частей сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

– Что же нужно, чтобы сделать расчет на прочность ?

8. ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ, ВЫПОЛНЯЯ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

– Интуитивно ясно, что на прочность любой конструкции влияют обстоятельства совершенно разной природы:

- чем больше действующие **нагрузки**, тем выше опасность разрушения;
- чем массивнее конструкция (больше ее **размеры**) при одной и той же нагрузке, тем опасность разрушения меньше;
- и, наконец, прочность конструкции определяется прочностью материала, из которого она изготовлена.



Проводить расчеты, учитывая абсолютно все (вплоть до молекулярных) **силы**, действующие на изделие, а также **особенности их приложения**, мельчайшие нюансы **геометрии** и реальные (в определенных условиях весьма непросто-

ые) **прочностные и деформационные свойства** конкретной стали или сплава – дело практически безнадежное. Уж слишком сложным оказывается расчетный объект. Поэтому в сопротивлении материалов используют приближенный или, как говорят, инженерный, подход к разработке методов расчета на прочность и жесткость. Главная его особенность состоит в том, что прочнисты (впрочем, как и все инженеры) работают не с реальной деталью или элементом конструкции а с их **расчетной схемой** – моделью объекта, освобожденного от несущественных в **данных условиях** подробностей.

Таким образом, построение расчетной схемы включает упрощение свойств конструкции в **трех** направлениях: схематизацию **геометрии** реального объекта, схематизацию **нагрузок** и схематизацию **свойств материала**.

Многолетний опыт позволил выработать определенные правила и порядок построения расчетных схем различной сложности – в зависимости от того, насколько точно необходимо отразить те или иные особенности детали, или, напротив, не обращая внимания на подробности, отображать ее в целом. Поэтому для одного и того же объекта можно построить несколько различных расчетных схем и, наоборот, одна и та же

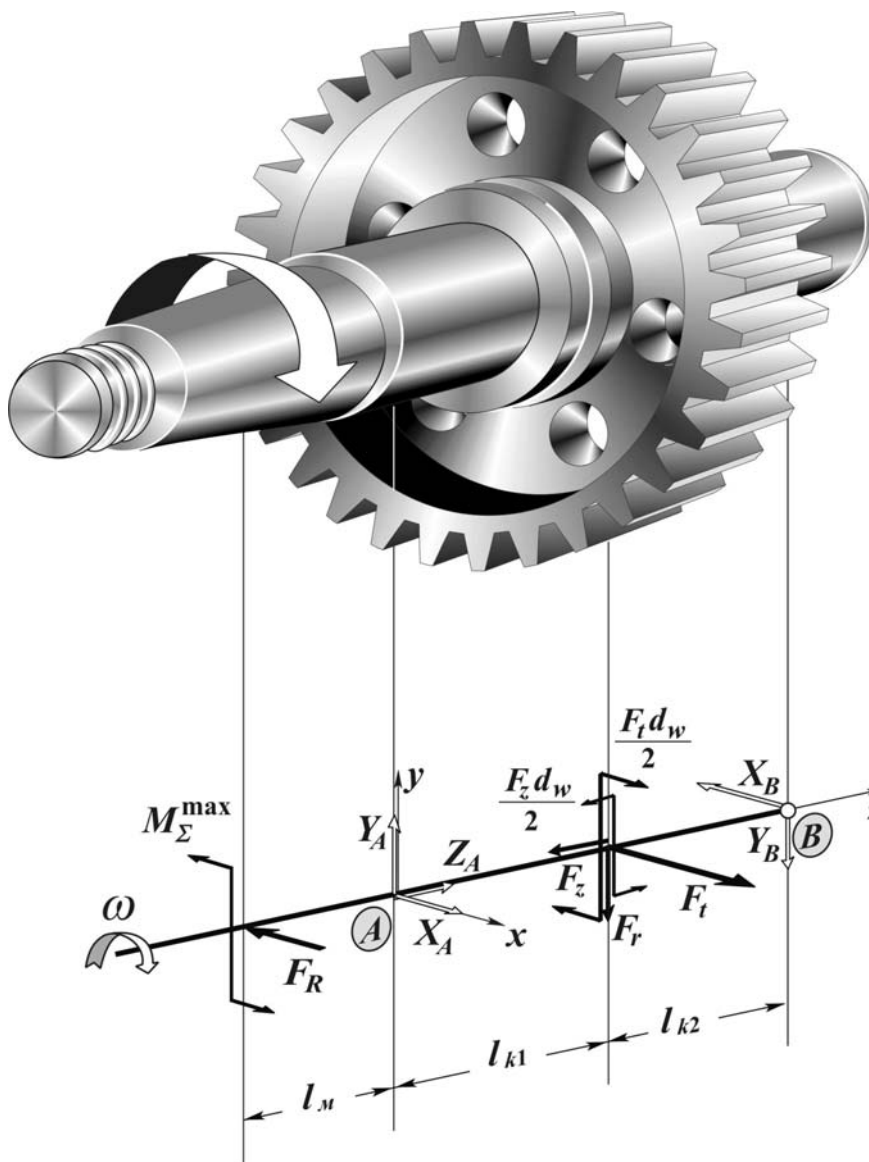


Рис. 22. Тихоходный вал редуктора и его расчетная схема

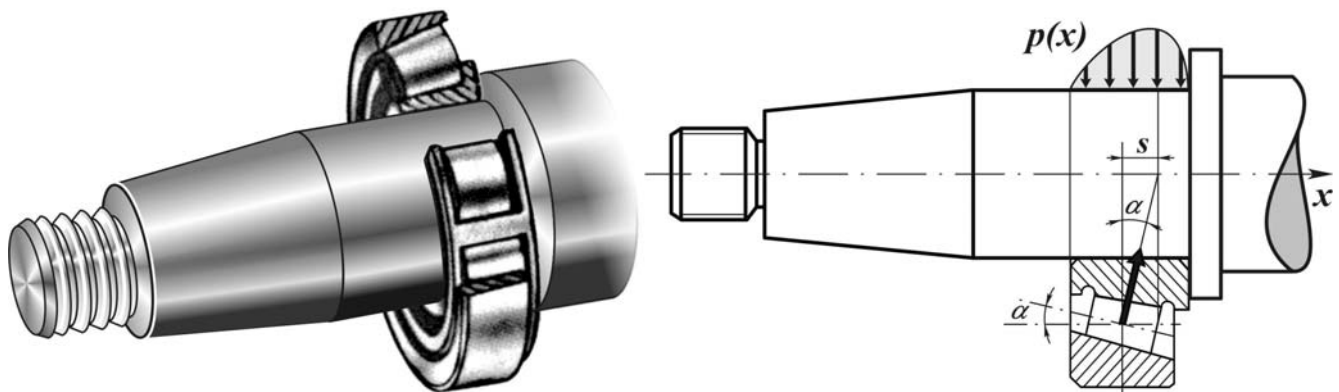


Рис. 23. Шип (концевая часть) тихоходного вала редуктора и расчетная схема для определения контактных напряжений

схема может отвечать разным объектам. На рис. 22, 23 показаны две совершенно разные расчетные схемы одной и той же детали – тихоходного вала мотор-редуктора. Если в первом случае (рис. 22) предполагается расчет всего вала в целом, то во втором (рис. 23) – лишь одной, правда, весьма ответственной его части, так называемой цапфы, под действием контактного давления со стороны подшипника (концевую цапфу принято называть шипом).



Несмотря на существующие рекомендации, формирование расчетной схемы по-прежнему остается в значительной мере искусством, когда огромную роль играют опыт и интуиция расчетчика. Говорят, удачная расчетная схема подобна талантливо выполненному шаржу – всего несколько штрихов, и мы безошибочно узнаем черты любимого поэта, певца или артиста.

– Расскажите, как составить расчетную схему.

9. СХЕМАТИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА

В сопротивлении материалов все объекты по признаку **формы** принято делить на три группы: **стержни**, **оболочки** и **массивы**.

1. *Стержнем* называется такое тело, один из размеров (длина) которого значительно, по крайней мере, на порядок, превышает размеры его поперечного сечения. Иногда стержень еще называют *брусом*.

Именно с такими, пожалуй, самыми простыми телами, мы и будем иметь дело в нашем курсе.

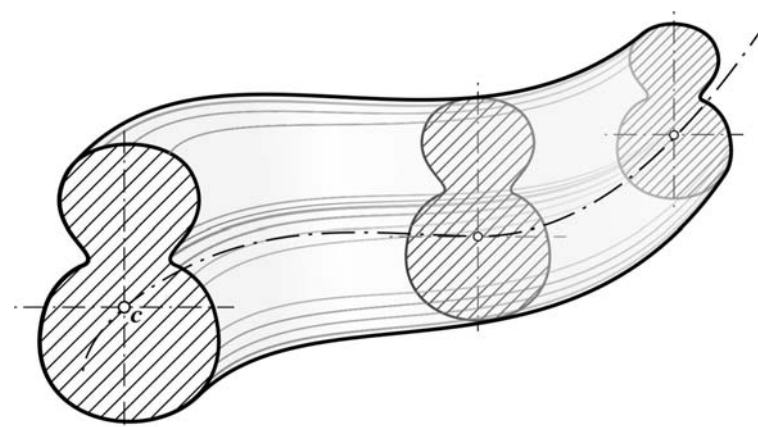


Рис. 24. Схема образования стержня

Стержень образуется перемещением какой-либо плоской фигуры вдоль некоторой кривой (или прямой) – оси стержня. Сама же фигура, располагающаяся центром тяжести на оси и нормальная к ней, представляет *поперечное сечение стержня* (рис. 24).

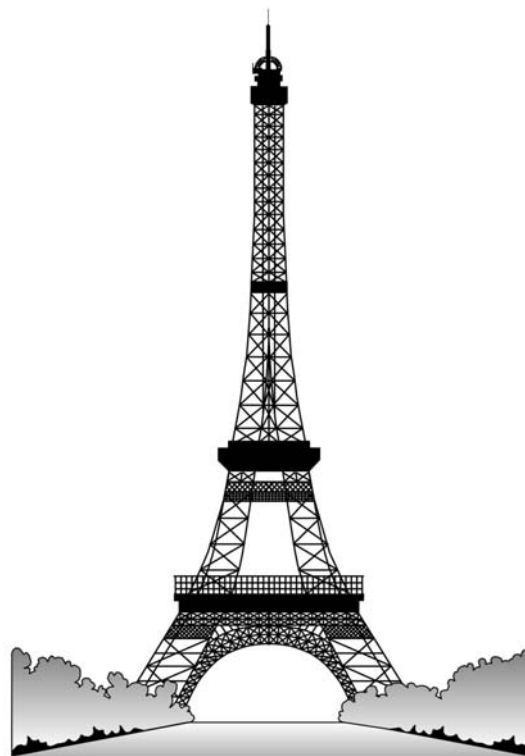
Объекты, которые целиком или отдельные их части схематизируют в виде стержней,



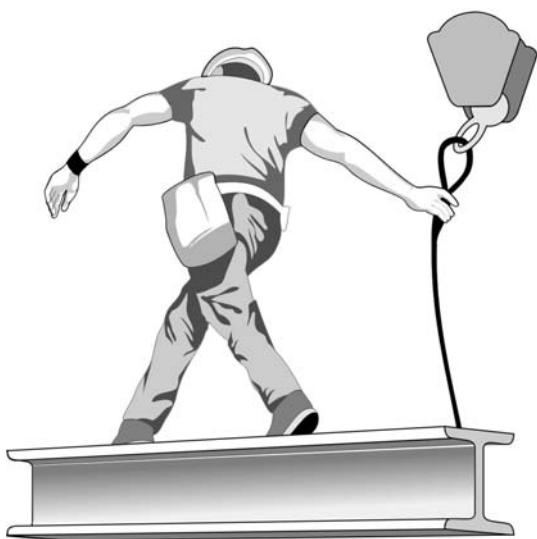
a)



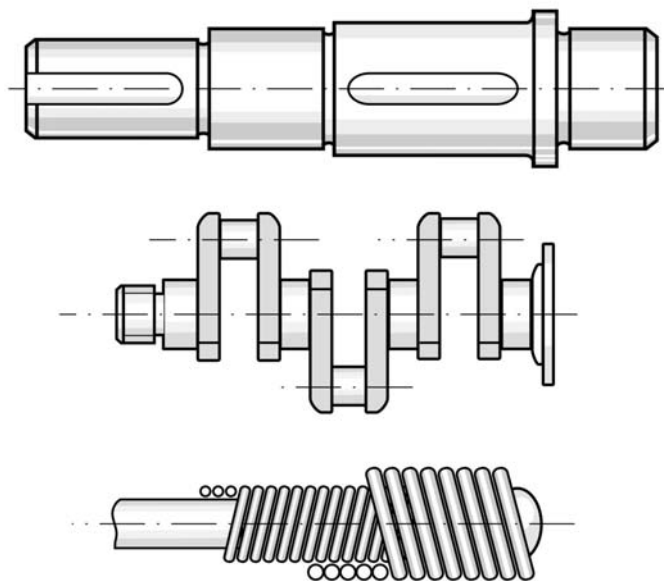
б)



в)



г)



д)

Рис. 25. Примеры стержневых конструкций: *а)* мост в городе Сидней (Австралия) с несущей фермой; *б)* мост вантовой системы подвески перекрытия (США); *в)* Эйфелева башня (Франция); *г)* монтаж балки перекрытия двутаврового сечения; *д)* валы различных машин: прямой ступенчатый (редукторы, валы судовых и авиационных двигателей), коленчатый (поршневые машины – ДВС, насосы, компрессоры), гибкий (переносной инструмент)

широко распространены в инженерной практике. Это многочисленные фермы, рамы и перекрытия, работающие на изгиб, валы различных машин и многое другое. На рис. 25 показаны примеры некоторых конструкций подоб-



Рис. 26. Применение оболочек в технике. Оболочки, работающие под внутренним давлением: мягкая – а) дирижабль, воздушный шар, купол парашюта системы десантирования); б) жесткая (герметичный фюзеляж самолета); в) многослойная армированная (бескамерная шина); з) оболочки под внешним давлением (прочный корпус подводной лодки); д) сложная подкрепленная оболочка (относительно небольшое внешнее давление, знакопеременные изгиб и кручение – корпус и грузовые отсеки судна-сухогруза)

ного типа. Между прочим, канаты, тросы, цепи, ремни с точки зрения расчетчика – тоже стержни, с той особенностью, что они способны воспринимать лишь растягивающие усилия.

2. *Оболочка* – такое тело, один из размеров (толщина) которого значительно, по крайней мере, на порядок, меньше двух других (можно сказать, что плоская пластина является частным случаем оболочки). И таких конструкций вокруг нас немало, некоторые из них показаны на рис. 26.

3. И, наконец, *массив* – тело, у которого все размеры одного и того же порядка (рис. 27).

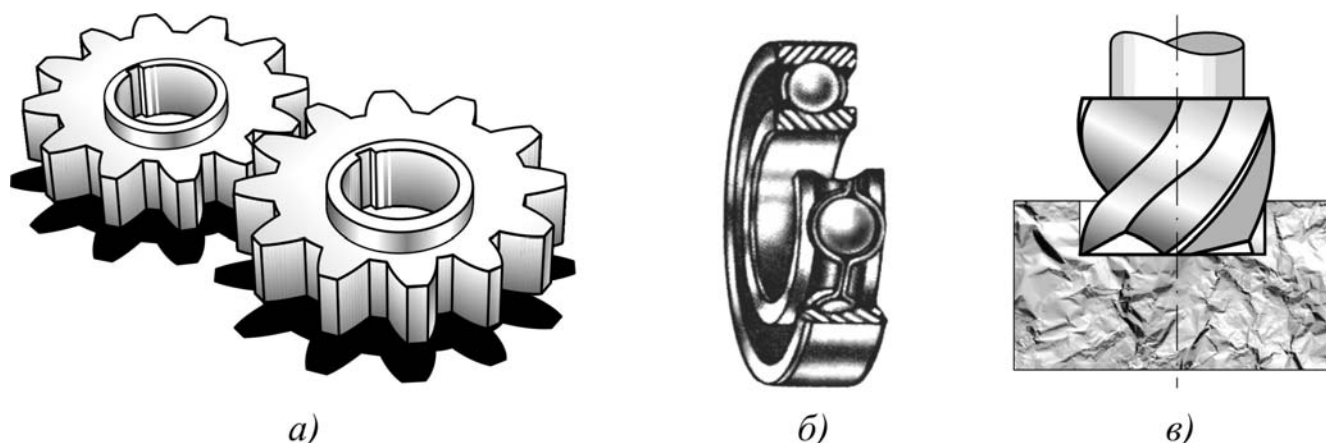


Рис. 27. При решении контактной задачи массивами представляют, например, зубья цилиндрических, конических и червячных зубчатых передач – а); тела качения и беговые дорожки подшипников качения – б); торцевую фрезу и обрабатываемый материал – в)

10. СХЕМАТИЗАЦИЯ НАГРУЗКИ

Роль нагрузки на подлежащий расчету объект может играть любое воздействие – сосредоточенная (приложенная в точке) сила, сила, распределенная вдоль линии, по поверхности или объему тела, или же пара сил – сосредоточенная или распределенная

Классификация **нагрузок** в сопротивлении материалов производится по нескольким совершенно разным признакам (приблизительно по принципу «идут два трамвая: один красный, а другой – в парк»).

Таким образом, различают усилия:

- *внешние* и *внутренние*; если конструкция рассматривается изолированно от окружающих ее тел, то действие последних заменяется соответствующими силами, которые в этом случае являются **внешними** (вспомните: «сила есть мера взаимодействия тел»). Если же речь идет о взаимодействии тел (или частей одного тела) **внутри** выделенной системы, то оно

характеризуется **внутренними** усилиями. В зависимости от характера приложения **внешние** нагрузки могут быть

– *сосредоточенными* и *распределенными*. Сосредоточенной считается сила, приложенная в точке (понятно, что это представление идеализировано); кроме того, сила может быть распределена вдоль линии, по поверхности или объему тела. То же самое можно сказать и в отношении пар сил. Заметим, что силы **внутренние**, действующие в твердом деформируемом теле, могут быть только распределенными (как известно, силы веса, инерции, силы взаимодействия между частицами тела атомарной или молекулярной природы, силы электромагнитного характера распределены по объему тела). На рис. 28 показаны внешние воздействия различного типа и их условное изображение на расчетных схемах.

– кроме того, в зависимости от своей природы (происхождения) **внешние** нагрузки могут быть *активными* и *реактивными*.



Активные нагрузки – это воздействия, прикладываемые к данному телу извне, например, со стороны других тел, не включенных в рассматриваемую механическую систему.

Реактивные нагрузки представляют собой **реакции** отброшенных связей механической системы с окружающей средой, оказывающих воздействие на рассматриваемую систему.

Как известно, любое свободное тело в пространстве обладает **шестью** степенями свободы, под которыми подразумевается возможность совершения шести простых движений: **трех линейных** перемещений вдоль соответствующих координатных осей и **трех угловых** (во вращательном движении) вокруг этих же осей. Каждая связь, наложенная на твердое тело, отнимает одну из степеней его свободы. Так жестким защемлением (заделкой) накладывается шесть связей (в плоскости – три), запрещающая всякое перемещение данного тела. Устройство, ограничивающее линейное перемещение, но не препятствующее угловому, называется сферическим (в пространстве) или цилиндрическим (в плоскости) шарниром. Освобождаясь от связей, действие их на объект заменяют отвечающими им **реакциями** – силой (если связь ограничивает поступательное



освобождаясь от связей, действие их на объект заменяют отвечающими им **реакциями** – силой (если связь ограничивает поступательное

движение) или парой сил (при ограничении движения вращательного характера).

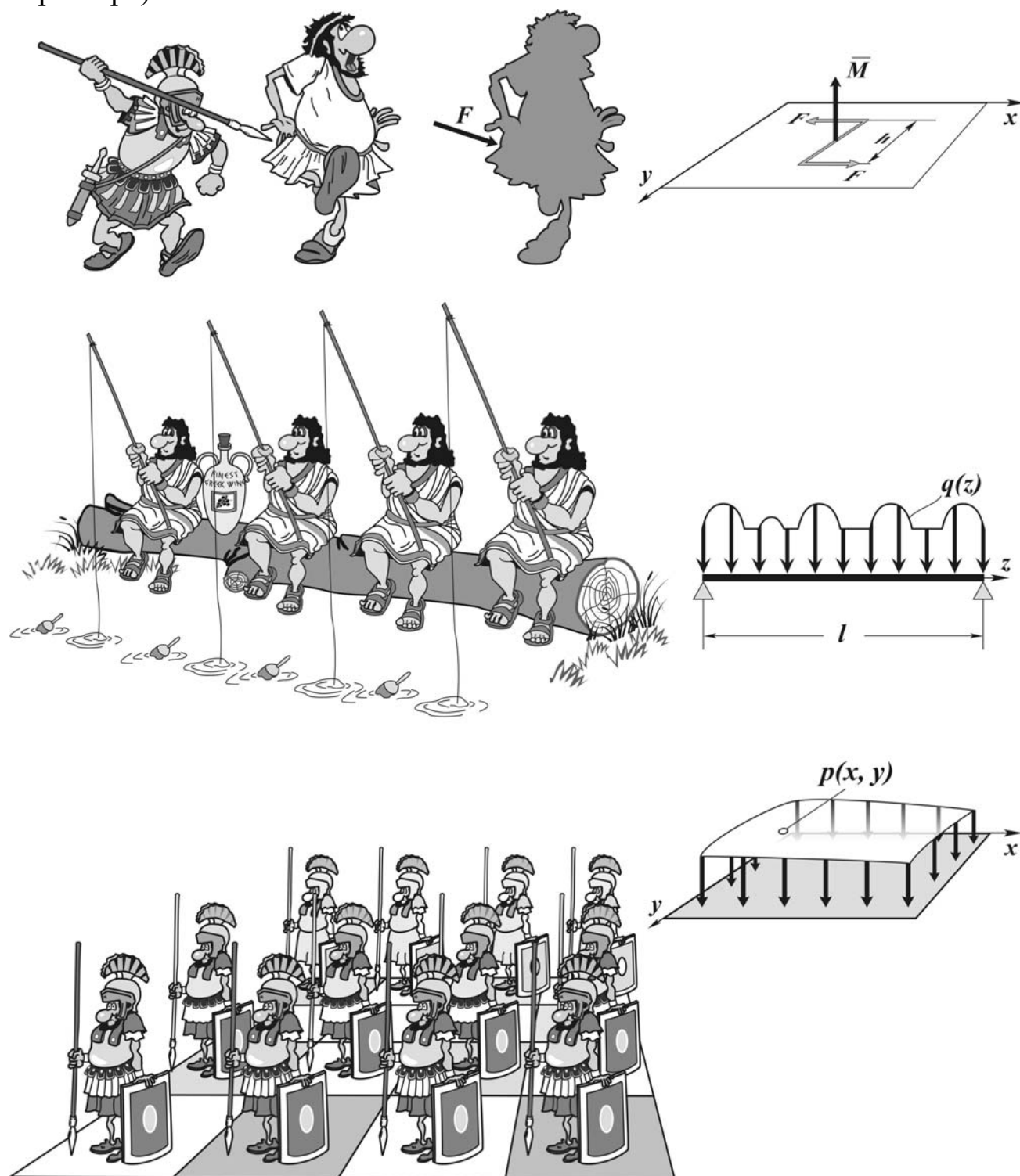


Рис. 28. Сосредоточенные воздействия: сосредоточенная (приложенная в точке) сила; сосредоточенная пара сил ($\bar{M}$ – вектор момента пары сил); нагрузка, распределенная вдоль линии (q – интенсивность погонной силы, численно равная силе, приходящейся на единицу длины); нагрузка, распределенная по поверхности (p – поверхностное давление, численно равное силе, приходящейся на единицу площади)

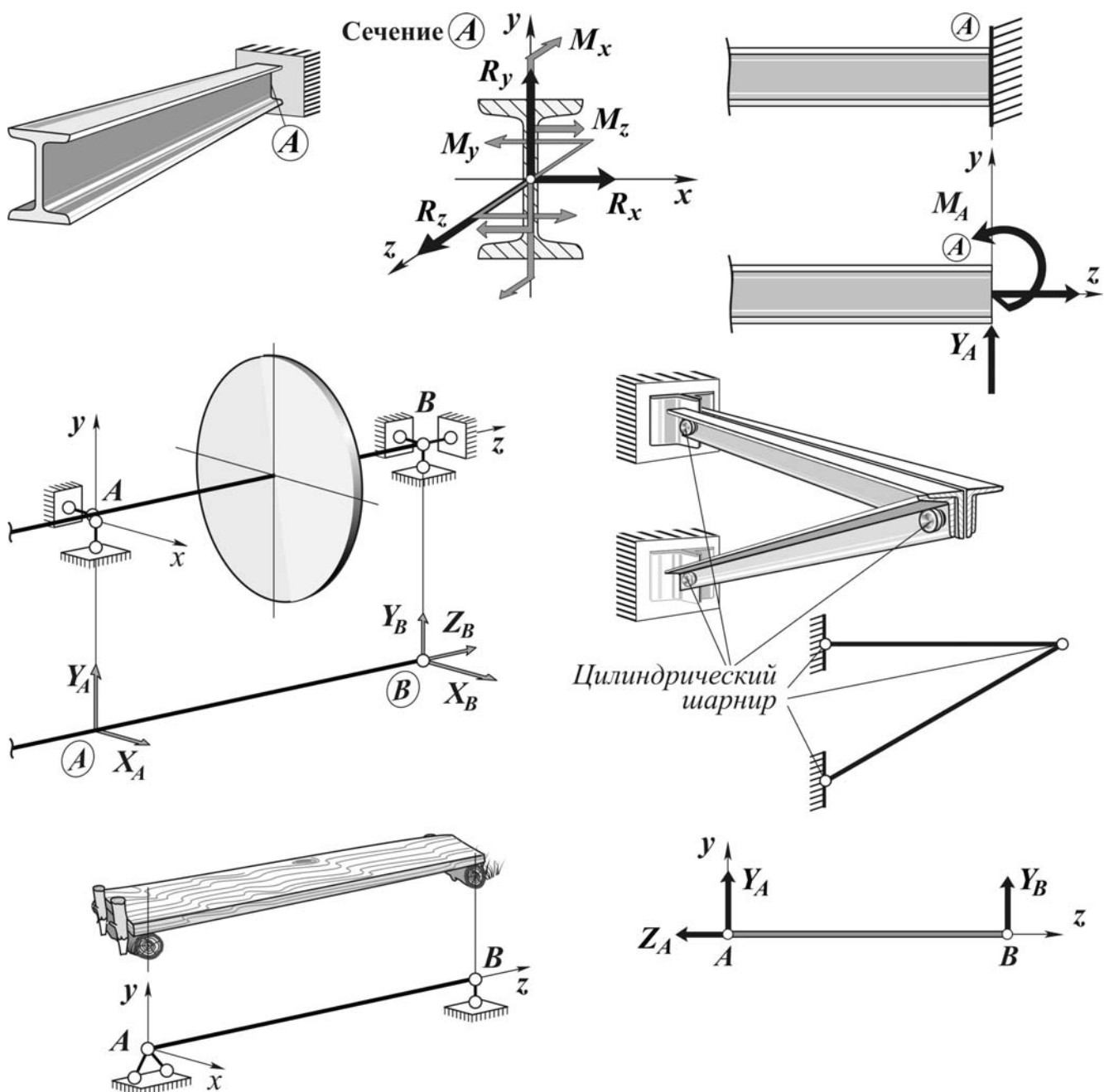


Рис. 29. Различные типы опорных устройств: заделка, шарнирные трех-, двух- и односвязные опоры, выполненные на основе цилиндрического шарнира; их изображения на расчетных схемах, а также составляющие реакций связей в общем случае нагружения

На рис. 29 показано жесткое защемление двутавровой балки, условное изображение его в пространстве и на плоскости, а также составляющие реакции такой связи. Там же (средний ряд) приведены условные изображения шарнирной трехсвязной опоры, представляющей сферический шарнир (опора B), шарнирной двусвязной опоры (A), реализованной с помощью двух цилиндрических шарниров. Кроме того, на рисунке представлено шарнирное соединение стержней уже знакомой нам простейшей фермы и его обозначение на расчетной схеме. В нижнем ряду показаны двусвязная и одно-

связная шарнирные опоры в плоскости, а также соответствующие реакции всех изображенных опорных устройств. Следует подчеркнуть, что все составляющие реакций опор отвечают **общим условиям нагружения**. В каждом конкретном случае часть из них может отсутствовать – на то они и **реакции** на активное воздействие (в общем, есть воздействие – есть реакция, нет воздействия – нет реакции).

– Как же догадаться, какая реакция будет, а какой не будет?

– Никаких догадок! Хвала Афине, сопротивление материалов есть наука точная! И не надо быть хитроумным, как Одиссей, чтобы понять: все реакции совершенно точно определяются из **условия равновесия** тела, **освобожденного от связей**, когда к нему приложены **все внешние нагрузки** – активные и реактивные. Вернитесь к разделу 6 и еще раз внимательно просмотрите разобранные там примеры. Получение усилий в выбранных сечениях и представляет, по сути дела, определение реакций опор. Каких именно? Ответ на этот вопрос вы найдете, читая заключительную часть этого раздела, посматривая при этом на рис. 29.

Таблица 2 Обозначение и размерность наиболее употребительных нагрузок

Наименование нагрузки	Обозначение нагрузки	Размерность нагрузки	
		в международной системе СИ	в технической системе единиц
Сосредоточенная сила	F	Н	кГ, кгс
Сосредоточенный момент (пара сил)	M	Нм	кГм
Распределенная вдоль линии (погонная) сила	q	$\frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$\frac{\text{кГ}}{\text{м}}$
Распределенный вдоль линии (погонный) момент	m	$\frac{\text{Нм}}{\text{м}}$	$\frac{\text{кГм}}{\text{м}}$
Распределенная по поверхности сила (поверхностное давление)	p	$\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \equiv \text{Па}^{**}$	$\frac{\text{кГ}}{\text{м}^2}$
Распределенная по объему сила (силы веса, силы инерции и др.)	γ	$\frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{кГ}}{\text{м}^3}$

*Н – ньютон, **Па – паскаль.

И, наконец, приведем таблицу (табл. 2) с размерностями нагрузок, часто встречающихся в задачах расчета на прочность и жесткость.

11. СХЕМАТИЗАЦИЯ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Как уже было сказано выше, формирование расчетной схемы предполагает идеализацию свойств материала. На этот счет в сопротивлении материалов принимается ряд гипотез.

1. Материал **однороден** – его свойства во всех точках и произвольного размера объемах тела одинаковы. Из этой гипотезы вытекает **гипотеза сплошности**.
 2. Материал **сплошен** – объем тела заполняется материалом равномерно, без пустот и инородных включений.
- Эти два допущения позволяют при анализе закономерностей поведения конструкций использовать математический аппарат непрерывных функций, в частности, оперировать бесконечно малыми величинами.
3. Материал **изотропен**, то есть, его свойства во всех направлениях одинаковы. Вместе с тем существуют как природные (например, дерево, кость), так и искусственные (фанера, прокатные профили, стеклопластик, углепластик и другие композиты) заведомо анизотропные материалы.
 4. Материал работает **упруго**. Это допущение справедливо лишь в определенном диапазоне нагрузок. На рис. 30 показана диаграмма «сила ~ удлинение», полученная при растяжении цилиндрического образца из малоуглеродистой стали. Как видите, гипотеза упругости, утверждаю-

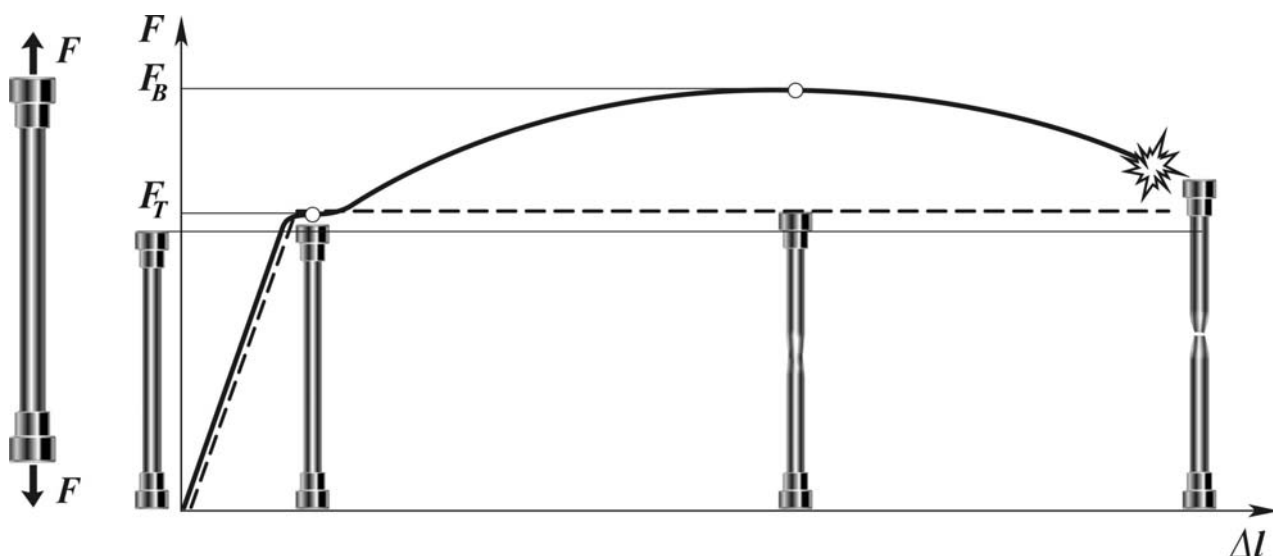
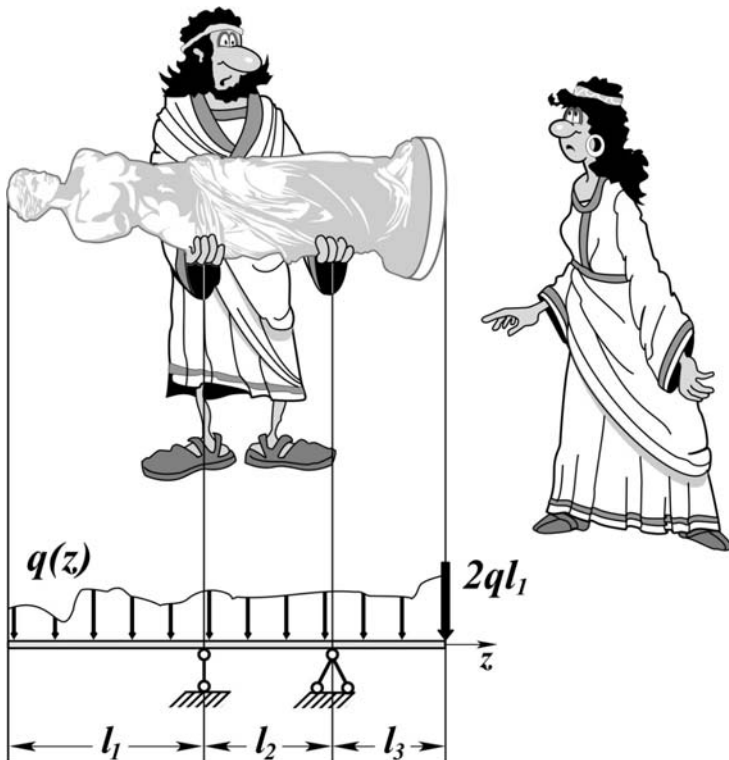


Рис. 30. Диаграмма зависимости удлинения цилиндрического образца от приложенной нагрузки и ее аппроксимация для идеального упруго-пластического материала

шая, что удлинение тела пропорционально приложенной нагрузке с достаточной для инженерных расчетов точностью справедлива только до величины, обозначенной F_T (сила, соответствующая пределу текучести), и даже чуть меньшей. Лишь в специальных случаях, например, в расчетах по предельному равновесию, принимают более сложные (но все равно упрощенные) свойства материала. Схематизация реальной диаграммы для такого модельного тела показана штриховой линией.



И в заключение раздела – довольно пикантная ситуация, в которую попал один из наших героев. Поможем ему, подготовив расчетную схему для оценки прочности пусть даже такого своеобразного объекта.

Надеюсь, что ваша «подсказка» будет выглядеть так же, как показано на рисунке.

Так что, друзья мои, сопротивление материалов – это не просто необходимейшая в инженерном деле наука, но и готовые к применению в любой момент крепкие знания, находчивость и взаимовыручка.

- Спасибо, Вы напомнили многое из того, что было уже пройдено. Кое-что действительно подзабылось. Но нельзя ли поближе к нашей главной теме — расчетам на прочность ?

12. СУТЬ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

- В сопротивлении материалов рассматривается, пожалуй, наиболее простой и распространенный в инженерной практике подход к оценке прочности типовых элементов конструкций – **расчет на прочность по допускаемым напряжениям**.

В ходе лекций по сопротивлению материалов будут получены зависимости, с помощью которых можно рассчитать *напряжения* в конструкции. Определение этого понятия посмотрите в своем конспекте или учебнике. Однако сама по себе величина напряжения еще мало о чем говорит. Пусть в некоторой области детали напряжение оказалось равным, например, 250 МПа (мегапаскалям). Много это или мало? Будет деталь работать или нет?

Все зависит от механических свойств материала: для малоуглеродистой стали марки Ст.3 такое напряжение приведет к чрезмерной деформации и, как следствие, потере работоспособности. Деталь же из легированной стали, скажем, 40ХН при таких напряжениях вполне работоспособна.

Таким образом, оценка прочности обязательно включает две стороны:



– определение **действующих** в конструкции напряжений, зависящих от **внешней нагрузки и геометрических параметров** системы;

– назначение **максимально возможного, допустимого** (из соображений надежности) напряжения, зависящего от **прочностных свойств** материала и **ответственности** конструкции,

А затем величины действующего и максимально допустимого напряжений **сопоставляют** между собой.

Первый этап – определение действующих напряжений – начинается с анализа *нагруженности* объекта. Под нагруженностью понимается распределение внутренних усилий вдоль оси стержня (именно такой расчетной схемой будет представлено большинство конструкций в нашем курсе, см. рис 25). С этой целью в сопротивлении материалов применяется так называемый *метод сечений*.

– Расскажите о нем.

13. МЕТОД СЕЧЕНИЙ И АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Пусть твердое тело (рис. 31) находится в **равновесии** под действием приложенных к нему n внешних нагрузок (активных и реактивных – реакций отброшенных связей). Роль нагрузки может играть любое воздействие – сосредоточенная (приложенная в точке) сила, сила, распределенная вдоль линии, по поверхности или объему тела, или же пара сил – сосредоточенная или распределенная.

Проведем произвольное поперечное сечение тела и рассмотрим любую из двух получившихся частей, например, правую (рис. 32), на которую действует система нагрузок $\{F_i\}_k$ ($k < n$). В общем случае она окажется **неуравновешенной**.

– Но почему? Ведь в составе тела она была в равновесии!

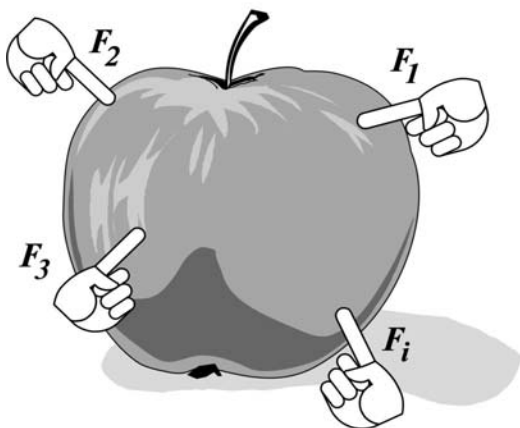


Рис. 31. Твердое тело находится в равновесии под действием системы нагрузок $\{F_i\}_n$

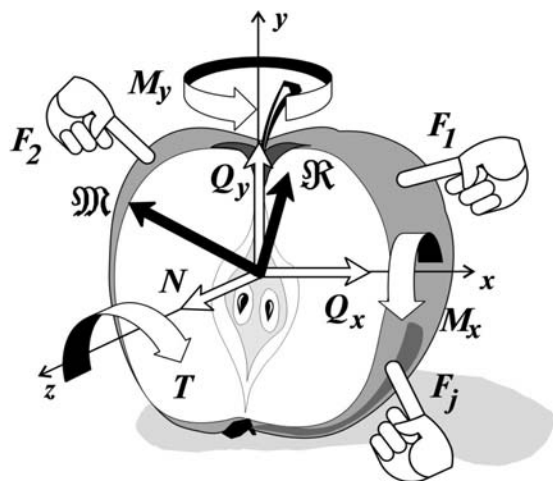


Рис. 32. Внутренние силовые факторы в поперечном сечении тела ($k < n$)

– А почему вообще твердое тело – твердое, почему оно не распадается на части? Всему «виной» взаимодействие отдельных его частиц – атомарного, молекулярного ли характера – сейчас это не важно. Важно лишь, что эти внутренние усилия – всегда распределенные, их-то мы и «потеряли», разделив части сечением. Понятно, что такая своеобразная реакция материала на деформирование возникает только в том случае, когда к объекту прикладываются внешние нагрузки. В связи с этим в сопротивлении материалов принимается *гипотеза о начальном ненапряженном состоянии тела*. Заметим, что в действительности в конструкции могут существовать внутренние усилия и до приложения внешней нагрузки, скажем, после отливки заготовки, сварки отдельных частей, механической обработки или в результате неточности сборки.

В соответствии с известной теоремой статики (теоремой Пуансо (9), см. раздел 6) любая система усилий может быть заменена ей эквивалентной – силой и парой сил. Силу определяет главный вектор сил $\bar{R}$ а момент – вектор главного момента $\bar{M}$ исходной системы (см. рис. 32). Представим их в виде составляющих, разложив по осям x , y , z :

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{Q}_x + \bar{Q}_y, \quad \bar{M} = \bar{T} + \bar{M}_x + \bar{M}_y;$$

x , y , z – главные оси, проведенные через центр тяжести фигуры, представляющей сечение.

Величины $\bar{N}$ – *нормальная сила*; $\bar{Q}_x$, $\bar{Q}_y$ – горизонтальная и вертикальная составляющие *поперечной* (или *перерезывающей*) *силы*; $\bar{T}$ – *крутящий момент*; $\bar{M}_x$, $\bar{M}_y$ – составляющие *изгибающего момента* в вертикальной и горизонтальной плоскостях, соответственно, получили название «*внутренние силовые факторы*». Внутренние силовые факторы можно рассматривать

как результат действия левой (отброшенной) части на правую (вспомните: «сила есть мера взаимодействия тел»). Они могут быть определены из условия равновесия любой из отсеченных частей (главное, чтобы были известны **все** – активные и реактивные – действующие на нее внешние нагрузки) с помощью известных уравнений статики:



$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k F_{iz} + N = 0; & \sum_{i=1}^k M_x(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^l \mathcal{M}_{jx} + M_x = 0; \\ \sum_{i=1}^k F_{ix} + Q_x = 0; & \sum_{i=1}^k M_y(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^l \mathcal{M}_{jy} + M_y = 0; \\ \sum_{i=1}^k F_{iy} + Q_y = 0; & \sum_{i=1}^k M_z(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^l \mathcal{M}_{jz} + T = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$\mathcal{M}_j$ – момент j -ой внешней пары сил общим числом l штук, приложенных к рассматриваемой части; F , N , Q , M , T – величины скалярного характера.

13.1 Простые виды нагружения

Разумеется, в сечении могут присутствовать не все шесть внутренних силовых факторов одновременно – это зависит от вида внешней нагрузки и способа ее приложения. В зависимости от того, какие внутренние силовые факторы оказались отличны от нуля, различают несколько *простых видов нагружения* стержня.

Если в сечении возникает только *нормальная сила* N , в стержне реализуется *растяжение* или *сжатие*, при этом **растягивающая** сила считается **положительной**, а **сжимающая** – **отрицательной** (рис. 33).

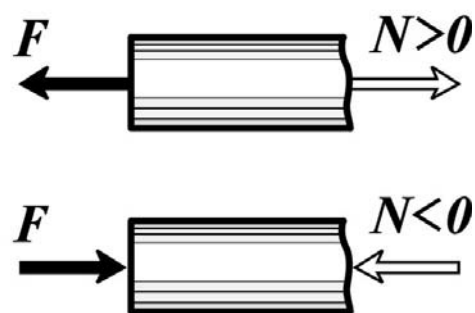


Рис. 33. Нормальная сила N в сечении стержня при растяжении-сжатии

При наличии *крутящего момента* T говорят о *кручении* стержня. Крутящий момент **в сечении**, направленный **против** часовой стрелки, считается **положительным**, **по** часовой стрелке – **отрицательным** (рис. 34), что сов-

падает с введенным ранее (раздел 5) правилом знаков для момента силы и пары сил.

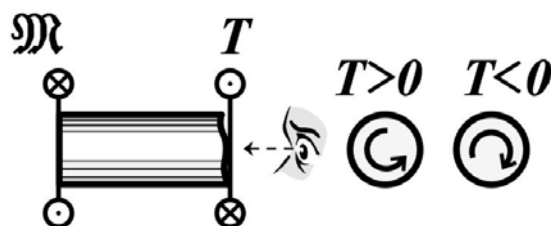
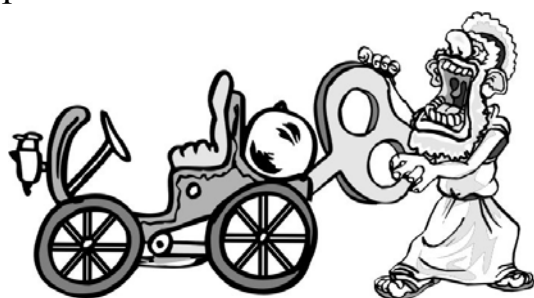


Рис. 34. Крутящий момент T в сечении при кручении стержня

В том случае, когда в сечении ненулевым будет лишь *изгибающий момент* M , говорят, что стержень испытывает *чистый изгиб*; знак изгибающего момента определяется знаком кривизны балки (рис. 35). Таким образом, **положительному** изгибающему моменту соответствуют **сжатые** волокна **сверху**, **отрицательному** – **снизу**.

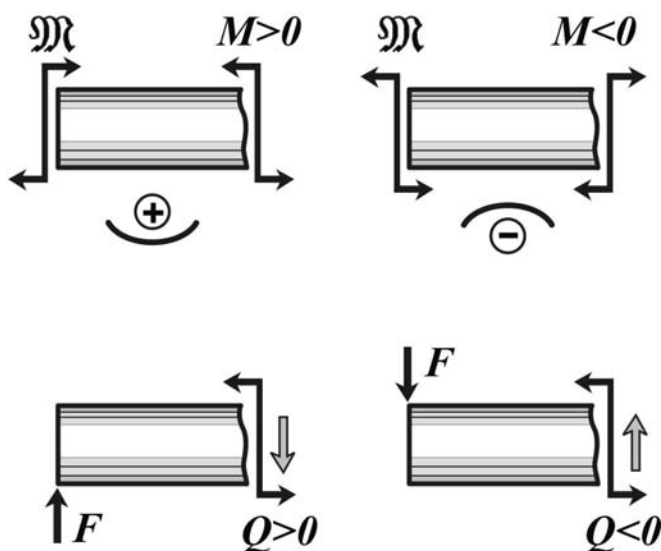


Рис. 35. Изгибающий момент M и поперечная сила Q в сечении при чистом и поперечном изгибе стержня

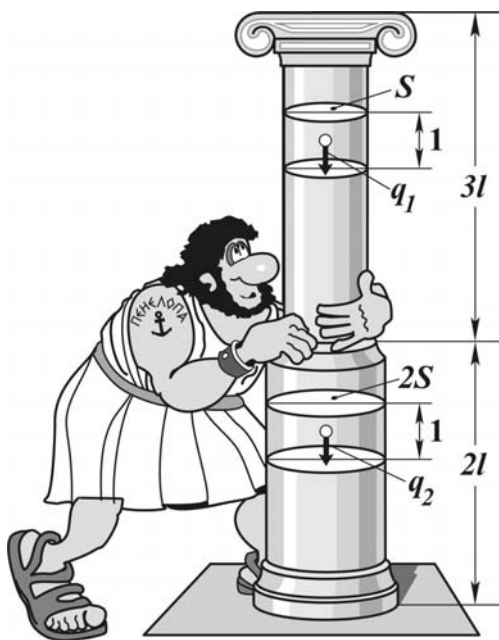
Если же помимо *изгибающего момента* M в сечении стержня присутствует еще и *поперечная (перерезывающая) сила* Q , в нем реализуется *поперечный изгиб*. Знак поперечной силы удобно определять по тому, в каком направлении пытается повернуть отсеченную часть балки результирующая поперечной **нагрузки** относительно рассматриваемого сечения (см. рис. 35): если **по** часовой стрелке – сила считается **положительной**, **против** часовой стрелки – **отрицательной**.

– Вы сказали, что метод сечений можно использовать для анализа нагруженности конструкций. Как?

– Применение метода сечений с этой целью поясним парой примеров.

12.2 Построение эпюр внутренних силовых факторов с помощью метода сечений

Как уже было сказано, для расчета на прочность по допускаемым напряжениям вначале необходимо выявить наиболее опасную (а таковой будет, конечно, наиболее нагруженная) область конструкции. Такой областью логично считать наиболее нагруженное **сечение**. Его, в свою очередь, удобно выбирать, построив график распределения того или иного внутреннего силового фактора вдоль продольной оси стержня; кстати, этот график в сопротивлении материалов называется *эпюрой*.



Пример 8. Для системы, изображенной на рис. 36, нужно построить эпюры всех отличных от нуля внутренних силовых факторов. Удельный вес материала γ . Могучий Герой пытается приподнять колонну с силой, в полтора раза превышающей вес верхней части.

Прежде всего, необходимо составить *расчетную схему* объекта. Схематизируя «геометрию», пренебрежем пилястрами и коническими элементами колонны, а затем приступим к определению нагрузок.

Рис. 36. Могучий Герой пытается поднять ступенчатую колонну, обладающую собственным весом

Очевидно, на колонну действует сила веса, причем неравномерно, и усилие Могучего Героя. Найдем интенсивность распределенной нагрузки на верхнем и нижнем участках. По определению, *интенсивность распределенной нагрузки численно равна силе (в данном случае, силе веса), действующей на единицу длины рассматриваемого участка*; тогда $q_1 = \gamma V_1 = \gamma S \cdot 1 \equiv q$; $q_2 = \gamma V_2 = \gamma 2S \cdot 1 = 2q$ (см. рис. 36). Сила, которую прикладывает Могучий Герой, равна

$$1,5\gamma V_1 = 1,5\gamma S \cdot 3l = 4,5ql.$$

И только теперь появляется возможность изобразить расчетную схему конструкции (рис. 37) и приступить к построению эпюры. Поскольку сейчас сила веса представлена явно, в виде распределенной нагрузки, положение бруса уже не играет никакой роли, поэтому для удобства изобразим его горизонтально. Между прочим, ступенчатость конструкции (различие площади сечений участков) на этапе построения эпюры тоже не имеет значения. Анализ нагруженности начнем с определения неизвестной пока **внешней**

нагрузки – реакции опоры (в нашем случае, жесткого защемления, или заделки). Для этого достаточно записать условие равновесия системы в форме суммы проекций всех сил на ось, совпадающую с осью бруса (по традиции ее обозначают z):

$$\sum F_z = -q \cdot 3l + 4,5ql - 2q \cdot 2l - R = 0;$$

$$R = -2,5ql.$$

Остальные условия равновесия удовлетворяются тождественно. Знак «-», как вы уже знаете, означает, что первоначальное предположение о направлении реакции было ошибочным.

Итак, для каждого из двух участков бруса применим метод сечений.

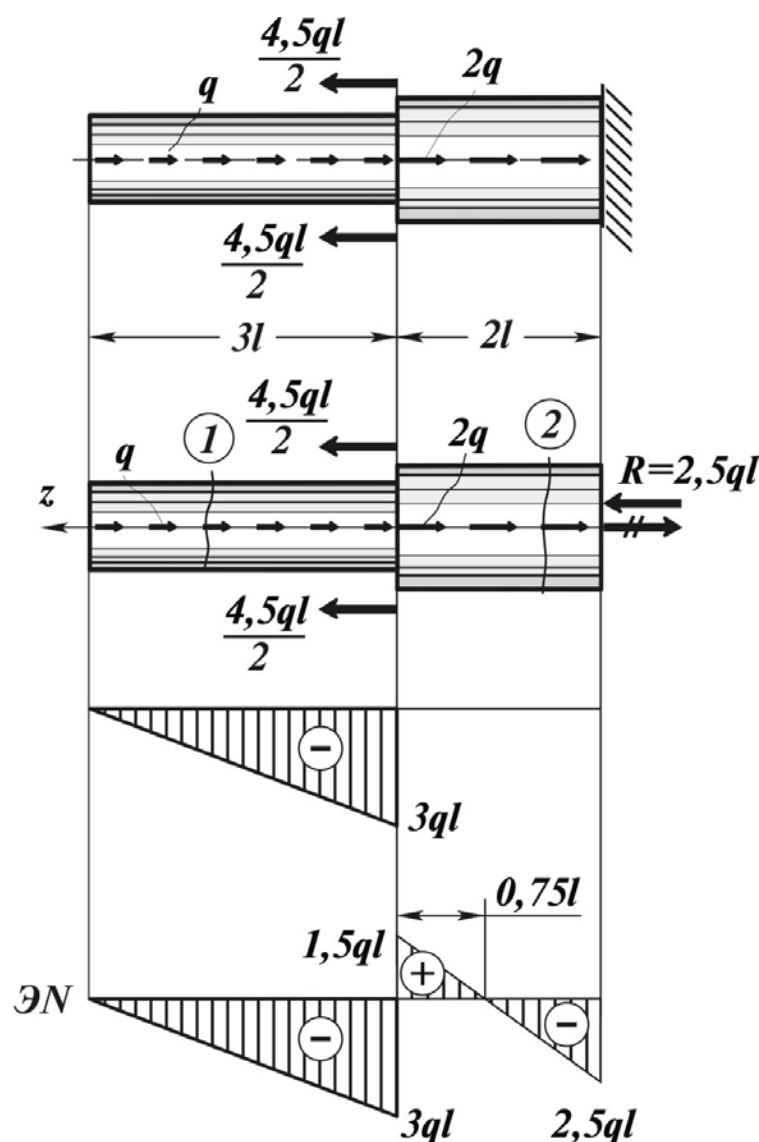


Рис. 37. Расчетная схема колонны и построение эпюры нормальной силы

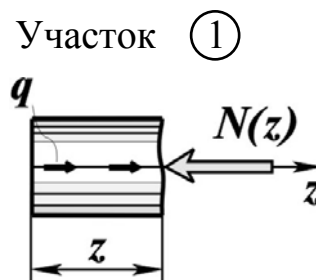


Рис. 38. Левая отсеченная часть (первый участок)

В любом месте на первом участке (см. рис. 37) проведем сечение и рассмотрим равновесие одной из получившихся частей, какой – безразлично (рис. 38). Главное, чтобы была известна **вся** приложенная к ней внешняя нагрузка – активная и реактивная.

Записав условие равновесия для этой части, найдем закон изменения нормальной силы – единственного ненулевого внутреннего силового фактора – на этом участке:

$$\sum F_z = q \cdot z - N(z) = 0, \quad N(z) = qz.$$

Как видно, функция $N(z)$ представляет линейную зависимость. Для ее построения найдем два значения $N(z)$ – в начале и в конце участка:

$$z=0, \quad N(0) = 0; \quad z=3l, \quad N(3l) = 3ql.$$

Заметьте, положительный знак перед силой N говорит лишь о правильном выборе ее направления и только. Сила на всем участке оказалась **сжимающей**, а это означает, что она **отрицательна** (см. рис.33). Осталось изобразить график изменения силы N на соответствующем участке, заштриховать его и проставить найденные значения, точнее, их абсолютные величины – знаки ставятся на самой эпюре (см. рис. 37).

Участок ②

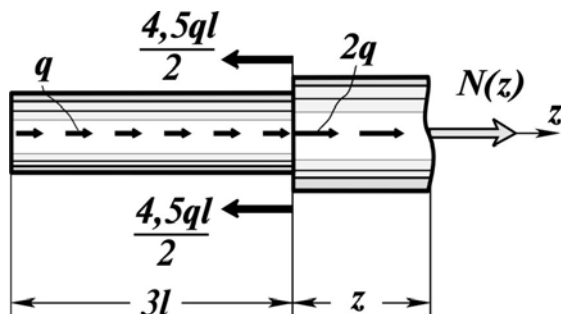


Рис. 39. Левая отсеченная часть (второй участок)

Проведем сечение 2 на втором участке (см. рис. 37) и рассмотрим равновесие одной, как и прежде, левой, отсеченной части (рис. 39). Излишне говорить, что в каждый момент времени рассматривается только **одно** сечение. Для того, чтобы уравнение получилось как можно проще, начало системы координат лучше поместить в **начало** рассматриваемого участка. Условие равновесия имеет вид

$$\Sigma F_z = 3ql - 4,5ql + 2q \cdot z + N(z) = 0, \quad N(z) = 1,5ql - 2qz;$$

$$z=0, \quad N(0) = 1,5ql;$$

$$z=2l, \quad N(2l) = - 2,5ql.$$

Оказывается, в начале участка направление силы мы угадали – она действительно растягивающая, значит, положительная, а вот в конце становится сжимающей, т.е., отрицательной. Кстати, если силу N в сечении изначально показывать всегда растягивающей, то знак ее, полученный при решении уравнения, будет именно тем, который нужно поставить на эпюре. Может так будет проще? Достроим эпюру ΣN на втором участке (см. рис. 37).

Обратите внимание, что изменение нормальной силы N («скачок») на границе участков от $-3ql$ до $1,5ql$ в точности равно величине сосредоточенной нагрузки $4,5ql$, приложенной там. И еще, внутренний силовой фактор в сечении, прилежащем к заделке, равен по величине и совпадает по воздействию с опорной реакцией. Это обстоятельство используют для контроля правильности построения эпюры.

Кроме того, на эпюре выделяется сечение, в котором усилие вообще отсутствует. Координаты таких сечений подлежат определению. Проще всего это сделать из геометрических соображений, воспользовавшись подобием двух треугольников:

$$\frac{1,5ql}{z} = \frac{2,5ql}{2l - z}, \quad \text{либо последним уравнением} \quad N(z) = 1,5ql - 2qz = 0.$$

Так или иначе, получим один и тот же ответ: $z = 0,75 l$.

На этом, собственно, построение эпюры $\mathcal{E}N$ можно и закончить.

- Создается впечатление, что всякий раз на каждом из участков производятся одни и те же действия.
- Вы верно подметили эту особенность; чтобы было легче запомнить постоянно повторяющуюся последовательность операций, придумана своеобразная «формула» процедуры метода сечений – **РОЗУ**:



Разрезали (выбрали сечение, в котором будем определять внутренний силовой фактор);

Отбросили (выбрали одну из получившихся частей со **всеми** – активными и реактивными – внешними нагрузками, приложенными к ней);

Заменяли (действие отброшенной части на рассматриваемую отобразили с помощью искомого внутреннего силового фактора);

Уравновесили (записали условие равновесия в форме суммы проекций всех сил на ось или суммы моментов относительно оси, проходящей через выбранное сечение, и определили величину внутреннего силового фактора).

- И так строятся любые эпюры?

– Конечно. Сравните построение эпюры крутящего момента (рис. 40) с тем, что было только что проделано. Для удобства сопоставления рассмотрим стержень, геометрически подобный предыдущему.

Пример 9. Нагрузка в виде сосредоточенных и распределенных пар сил также аналогична прежней. Для наглядности рядом (рис. 40) показаны схема и построенная ранее эпюра $\mathcal{E}N$ (см. рис. 37). Попробуем, не записывая всякий раз условия равновесия, воспользоваться для построения эпюры $\mathcal{E}T$ выявленными выше закономерностями.

Начнем с крайнего левого сечения. Какой-либо пары сил (или, как иногда говорят, сосредоточенного момента) в нем не приложено, а распределенный момент интенсивностью m нагрузки еще не создает (не успел!), поэтому в данном сечении крутящий момент $T=0$. Затем он, как следует из наших наблюдений, будет **линейно** изменяться от нуля до $3ml$ к концу первого участка. Остается лишь определить его **знак**. Для этого проведем сечение, недалеко отстоящее от начала участка. Рассмотрим левую отсеченную часть, приложив крутящий момент T такого направления, чтобы он уравновешивал результирующий момент внешней нагрузки mz , и определим направление

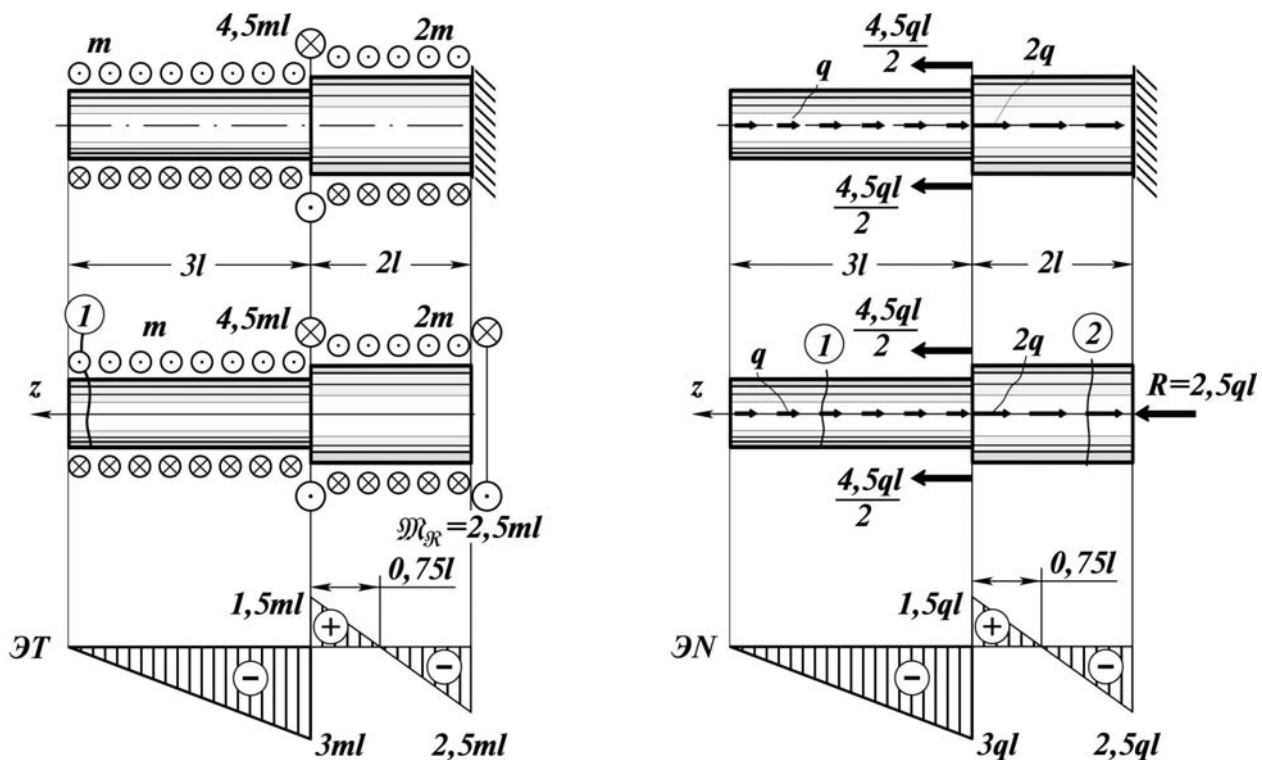


Рис. 40. Эпюры крутящего момента $\mathcal{E}T$ и нормальной силы $\mathcal{E}N$ строятся аналогично

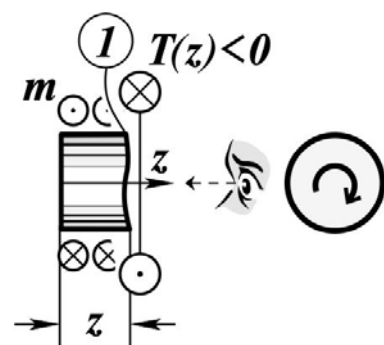
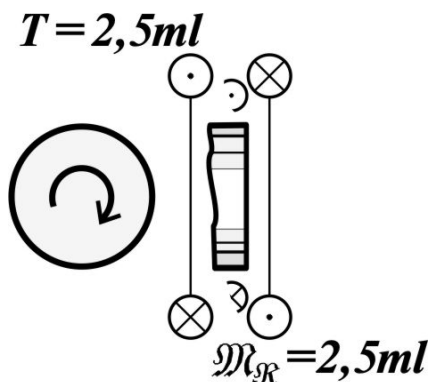


Рис. 41. К определению знака крутящего момента на первом участке



внутреннего силового фактора $T(z)$. В нашем случае – по часовой стрелке (рис. 41), стало быть момент T – отрицательный (см. подраздел 13.1 и рис. 34).

На границе двух участков приложена пара сил с моментом $4,5ml$ противоположного нагрузке на первом участке направления, поэтому «скачок» величиной $4,5ml$ следует отложить...

– Вверх!

– Верно. Далее, нагрузке интенсивностью $2m$ на втором участке того же, что и на первом, направления соответствует изменение крутящего момента также по линейному закону на величину $2m \cdot 2l = 4ml$ (от $+1,5ml$ до $-2,5ml$). Наконец, в крайнем правом сечении **внутренний силовой фактор** $T = 2,5ml$ уравнивается моментом реакции заделки $M_R = 2,5ml$ (рис. 42). Сравните эпюры $\mathcal{E}T$ и $\mathcal{E}N$ на рис. 40. Не правда ли, они словно близнецы!

Рис. 42. Крутящий момент в крайнем правом сечении стержня уравновешен реакцией заделки

И это неудивительно – при построении обеих используются одни и те же закономерности и приемы. По сути дела, вся разница – лишь в правиле знаков.

– А эпюры поперечной силы и изгибающего момента строятся так же?

– Разумеется, однако, если построение эпюры поперечной силы выполняется так же просто, как было изложено выше, то применение этой процедуры (РОЗУ) к эпюре изгибающего момента может оказаться заметно более трудоемким.

– Можно ли облегчить эту задачу?

– Да, в этой ситуации можно воспользоваться **дифференциальной зависимостью** между функциями **изгибающего момента** и **поперечной силы**, точнее, зависимостью **интегральной**, из нее вытекающей. В основе обеих лежит все то же условие равновесия (см. раздел 3).

Пусть однопролетная балка на двух шарнирных опорах нагружена произвольно изменяющейся распределенной нагрузкой (рис. 43). На расстоянии z от левой опоры

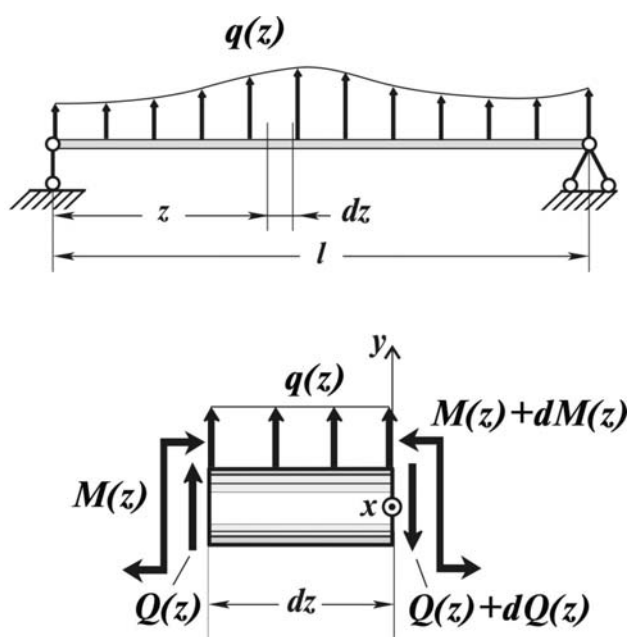


Рис. 40. К выводу дифференциальной зависимости между функциями поперечной силы и изгибающего момента



двумя бесконечно близкими сечениями выделим участок длиной dz . Рассмотрим его равновесие, записав соответствующее условие в форме суммы моментов относительно оси x в некотором сечении с координатой z (переменную величину $q(z)$ в пределах бесконечно малого участка dz можно считать постоянной):

$$\sum M_x = -M(z) - Q(z) \cdot dz - q \frac{dz^2}{2} + (M(z) + dM(z)) = 0.$$

Раскрывая скобки и разделяя переменные, пренебрежем слагаемым более высокого, чем первый, порядка малости; таким образом, окончательно получим

$$Q(z) = \frac{dM(z)}{dz}.$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что функция изгибающего момента $M(z)$ является первообразной для зависимости поперечной силы $Q(z)$ (см. раздел 3). Проинтегрируем ее в пределах от $z=0$ (начало участка) до текущего значения z :

$$M(z) = \int_0^z Q(z) dz + M_n$$

(величина момента M_n в начале участка играет роль константы интегрирования). Таким образом может быть подсчитан изгибающий момент в любом сечении. Обычно при построении эпюры необходимо определить значение момента не в каком-то произвольном сечении, а в конце участка, в сечении с координатой $z = l_k$. Если к тому же вспомнить геометрический смысл интеграла (он численно равен площади, заключенной под графиком подынтегральной функции в пределах от 0 до l_k), то требуемую величину момента можно подсчитать с помощью зависимости

$$M_k = M_n + \Delta M = M_n + S_{\Delta Q}$$

($S_{\Delta Q}$ – площадь эпюры ΔQ поперечной силы на данном участке).



Важно еще раз отметить, что полученная интегральная зависимость **справедлива лишь в пределах участка!** При построении конкретной эпюры ее придется применить столько раз, сколько участков выделяется на нашей балке. В данном случае *участком* будет называться часть стержня, в пределах которой зависимость $Q(z)$ описывается **одним и тем же уравнением** (сама поперечная сила изменяться может, а закон ее изменения – нет!), и внутри нет пары сил (сосредоточенного момента).

– Уважаемый Наставник, нужен пример!

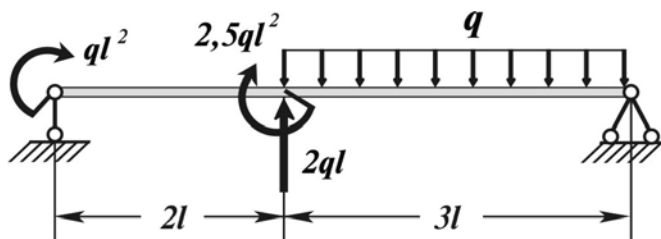


Рис. 44. Балка, нагруженная сосредоточенными и распределенными усилиями

Пример 10. Пожалуйста, покажем, как строятся эпюры внутренних силовых факторов, например, в балке на двух шарнирных опорах, которая нагружена сосредоточенными (силой и двумя парами сил) и распределенными усилиями (рис. 44). Как вы думаете, с чего следует начать?

– Наверное, с эпюры поперечной силы...

– Так-то оно так, но вот можно ли это сделать прямо сейчас?

– А почему нет?

– Вы забыли об одном очень важном условии. Для той части конструкции, равновесие которой будет рассматриваться, должны быть известны **все внешние (активные и реактивные) усилия**. С активными нагрузками все в порядке – они заданы, а вот реакции опор пока неизвестны, так что какое сечение ни выбери, ни левую, ни правую часть рассматривать нельзя...

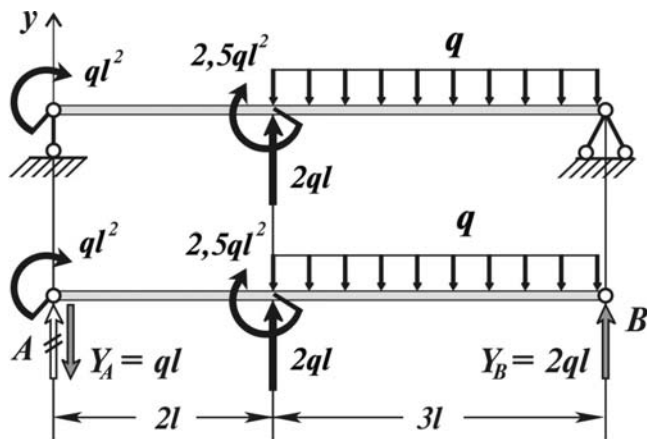


Рис. 45. Балка под действием всех (активных и реактивных) нагрузок

Итак, начинаем с определения опорных реакций, отбросив связи и заменив их соответствующими усилиями. Поскольку направление реакций Y_A , Y_B заранее неизвестно, направим их произвольно, например, вверх. Горизонтальной составляющей реакции опоры **B**, очевидно, не будет, так как осевая нагрузка на балку отсутствует (рис. 45).

Запишем условие равновесия системы в форме суммы моментов относительно горизонтальной оси в сечении **B**, перпендикулярной плоскости чертежа (на нашей схеме относительно точки **B**):

$$\sum M_B = -Y_A 5l - ql^2 - 2,5ql^2 - 2ql \cdot 3l + 3ql \cdot 1,5l = 0, \quad \text{откуда } Y_A = -ql. \quad (11)$$

Знак «-» отражаем изменением направления силы Y_A – не угадали (см. рис. 45). Вторая реакция (Y_B) может быть определена либо из аналогичного уравнения моментов относительно оси в сечении **A**, либо из условия равновесия в форме суммы проекций всех сил на ось y , причем второе – проще. Однако эта, привлекательная на первый взгляд, простота коварна: если при определении реакции Y_A будет допущена ошибка, вторая реакция также окажется **неверной!** Эта неприятность обязательно «вылезет» при построении эпюр – так жаль попусту потраченных сил и времени! Поэтому для **независимого** определения реакции Y_B используем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= Y_B 5l - 3ql \cdot 3,5l - 2,5ql^2 + 2ql \cdot 2l - ql^2 = 0; \\ Y_B &= 2ql \end{aligned}$$

(оказалось, что направление этой реакции было выбрано правильно); затем проверим правильность полученного результата (см. рис. 45):

$$\sum F_y = -ql + 2ql - 3ql + 2ql = 0. \quad (12)$$

Действительно, балка находится в равновесии.

Итак, строим эпюру поперечной силы. Количество участков в данном случае очевидно – два.

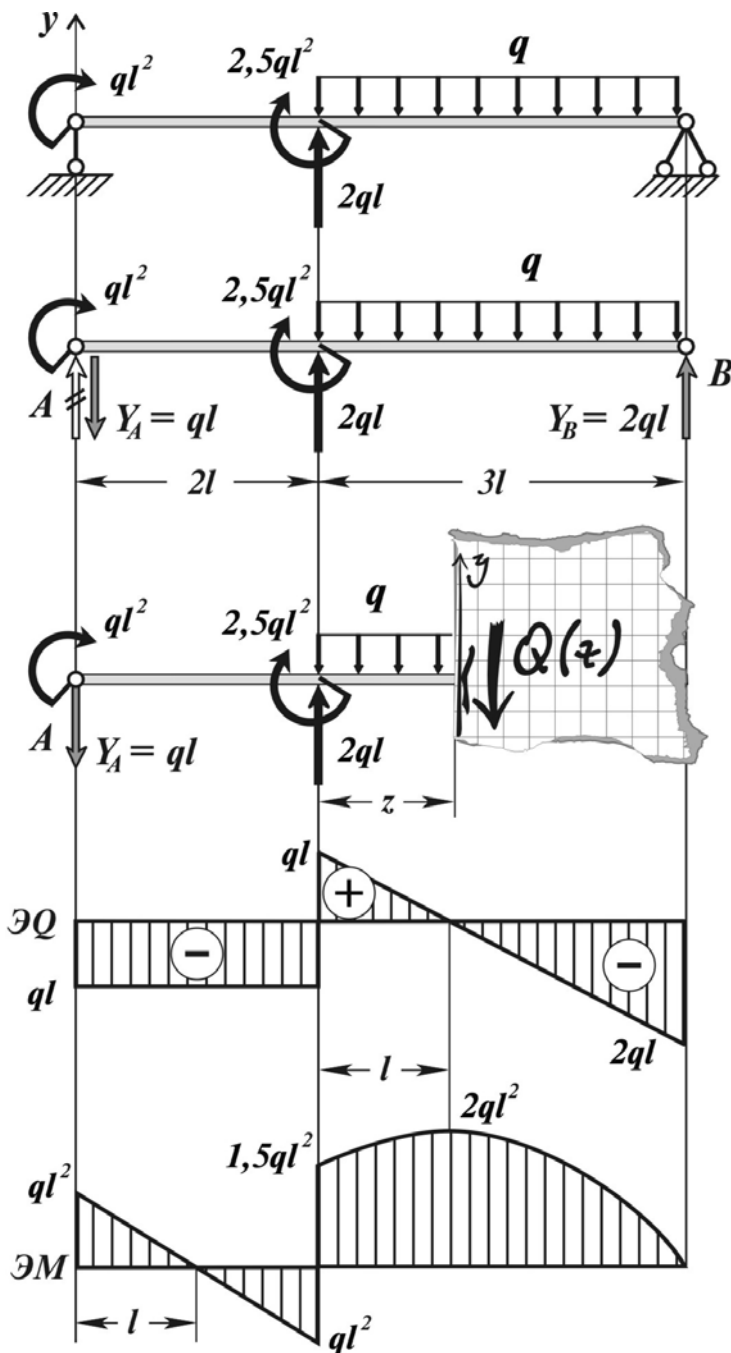


Рис. 46. Балка с приложенными к ней активными и реактивными нагрузками и эпюры поперечной силы и изгибающего момента

Каждый раз будем рассматривать левую отсеченную часть. В крайнем левом сечении A балки действует сосредоточенная сила Y_A – стало быть, в этом сечении на графике $\mathcal{E}Q$ должен быть «скачок» на величину ql (составьте мысленно или на бумажке условие равновесия). Далее эта величина на протяжении всего первого участка не меняется, поскольку других внешних нагрузок на нем нет. В общем, и здесь все как в жизни – чтобы что-то изменить, надо приложить усилия.

Знак поперечной силы определяем исходя из направления, в котором старается повернуть отсеченную часть балки поперечная нагрузка относительно рассматриваемого сечения (рис. 46); в данном случае – против часовой стрелки, значит, сила Q отрицательна (см. подраздел 13.1).

На границе участков, как видно, приложена сосредоточенная сила $2ql$ – на эпюре появляется «скачок» вверх именно такой величины – до значения $Q=ql$. Равномерно распределенной поперечной нагрузке отвечает линейно изменяющаяся поперечная сила (см. рис. 46):

$$\sum F_y = -ql + 2ql - qz - Q(z) = 0;$$

$$Q(z) = ql - qz;$$

$$\text{при } z = 0, Q(0) = ql.$$

К концу участка ее **изменение** будет равно величине результирующей распределенной нагрузки – $3ql$, а сама сила $Q=-2ql$. Наконец, в крайнем правом

сечении B действует сосредоточенная сила $Y_B = 2ql$, на эту величину скачкообразно изменяется поперечная сила Q (см. рис. 46). Таким образом, эпюра $\mathcal{EQ}$ «замкнулась», что является признаком уравновешенности системы в отношении сил. Фактически мы «прорисовали» уравнение (12)

$$\sum F_y = \dots = 0.$$

Полезно отметить одну закономерность, которая проявилась при построении $\mathcal{EQ}$: если двигаться от сечения к сечению слева направо, то можно даже не задумываться над знаком поперечной силы – как видно, **направление ее изменения соответствует направлению внешней нагрузки**.

Приступаем к построению эпюры изгибающего момента $\mathcal{EM}$. С точки зрения математики задача может быть сформулирована так: «По известным начальному значению и графику производной получить график первообразной функции» (см. раздел 3).

Первый участок. В крайнем левом сечении (A) приложена пара сил с моментом ql^2 , поэтому эпюру следует начать со «скачка», отложив именно это значение момента.

– Вверх или вниз?

– Вспомним правило знаков для изгибающего момента (см. подраздел 13.1), которое кратко можно сформулировать так: **«эпюра изгибающего момента строится на сжатом волокне»**. Где будут расположены сжатые волокна, если бы к балке была приложена только эта пара сил? Если при ответе на



Рис. 47. Простой опыт по определению положения сжатых волокон

этот вопрос возникают затруднения или сомнения, поставьте опыт – попробуйте согнуть ластик или стержень шариковой ручки в заданном направлении (рис. 47). Что же получилось?

– Сжатые волокна оказались сверху!

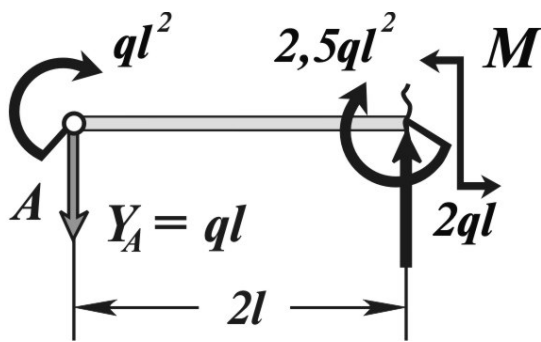
– Верно, итак, «скачок» величиной ql^2 откладываем вверх (см. рис. 46).

Далее смотрим на эпюру $\mathcal{EQ}$ – производная $Q(z) = \frac{dM(z)}{dz}$ отрицательна и постоянна на всем участке, это значит, что зависимость $M(z)$ представляет линейную убывающую функцию (вспоминаем о геометрическом смысле производной как о тангенсе угла наклона касательной к графику функции). К концу участка ее изменение будет численно равно соответствующей площади $\mathcal{EQ}$, а значение момента в конце участка составит

$$M_k = M_n + \Delta M = M_n + S_{\Sigma Q} = ql^2 + (-ql \cdot 2l) = -ql^2.$$

Обратите внимание, что площадь(!) $S_{\Sigma Q}$ оказалась отрицательной; все правильно – подсчитываемое изменение момента ΔM лишь **численно** (по абсолютной величине) равно площади соответствующей фигуры. Строим график $M(z)$ от начального значения $M_n = +ql^2$ спускаясь по прямой вниз на величину $\Delta M = S_{\Sigma Q} = 2ql^2$ до значения момента $M_k = -ql^2$ в конце участка (см. рис. 46). Очевидно, прямая, ограничивающая эпюру, пересечет линию нулевых значений как раз посередине участка, при $z=l$.

Второй участок. На границе участков, как видно, приложена пара сил с моментом $2,5ql^2$ того же, что и в начале, направления; таким образом, совершенно ясно, в какую сторону следует от-



кладывать соответствующий «скачок» – вверх. Значение момента в начале второго участка составит $M_n = 1,5ql^2$ (см. рис. 46). Если же на этот счет возникли какие-то сомнения, воспользуйтесь старым добрым методом сечений и определите «подозрительный» момент как по величине, так и по направлению (рис. 48):

Рис. 48. К определению изгибающего момента в начале второго участка

$$\sum M_x(2l) = ql \cdot 2l - ql^2 - 2,5ql^2 + M = 0;$$

$$M = 1,5ql^2.$$

Продолжаем анализировать график производной – ΣQ : производная линейна, значит, первообразная функция описывается квадратичной параболой, которая сначала возрастает на участке протяженностью l , где производная положительна, а затем убывает по тому же закону. Смена знака производной говорит о наличии экстремума (у нас – максимума) функции в данном сечении. Понятно, что значение $M_{\max}$ нужно определить обязательно, ведь цель построения любой эпюры – выявить опасное сечение (см. рис. 46). Таким образом, эпюру момента на втором участке целесообразно «просчитывать» в два приема:

$$M_{\max} = M_n + S_{\Sigma Q} = 1,5ql^2 + \frac{1}{2}ql \cdot l = 2ql^2; \quad M_k = M_{\max} + S_{\Sigma Q} = 2ql^2 + \frac{1}{2}(-2ql)2l = 0.$$

Значение момента в конце участка, в сечении **B**, оказалось равным нулю, что соответствует уравнению (11); и впрямь, идеальный шарнир (в отсутствии силы трения) момента не передает.

Итак, все характерные и экстремальные значения и той, и другой эпюры найдены: $Q_{\max} = 2ql$, $M_{\max} = 2ql^2$.

– А почему эпюра момента на втором участке нарисована выпуклой, а не вогнутой?

– Совершенно определенный ответ на этот вопрос дает анализ графика производной ($\mathcal{EQ}$): исходя из характера изменения тангенса угла (а, следовательно, и самого угла) наклона касательной делаем вывод в пользу первого варианта (см. рис. 46).

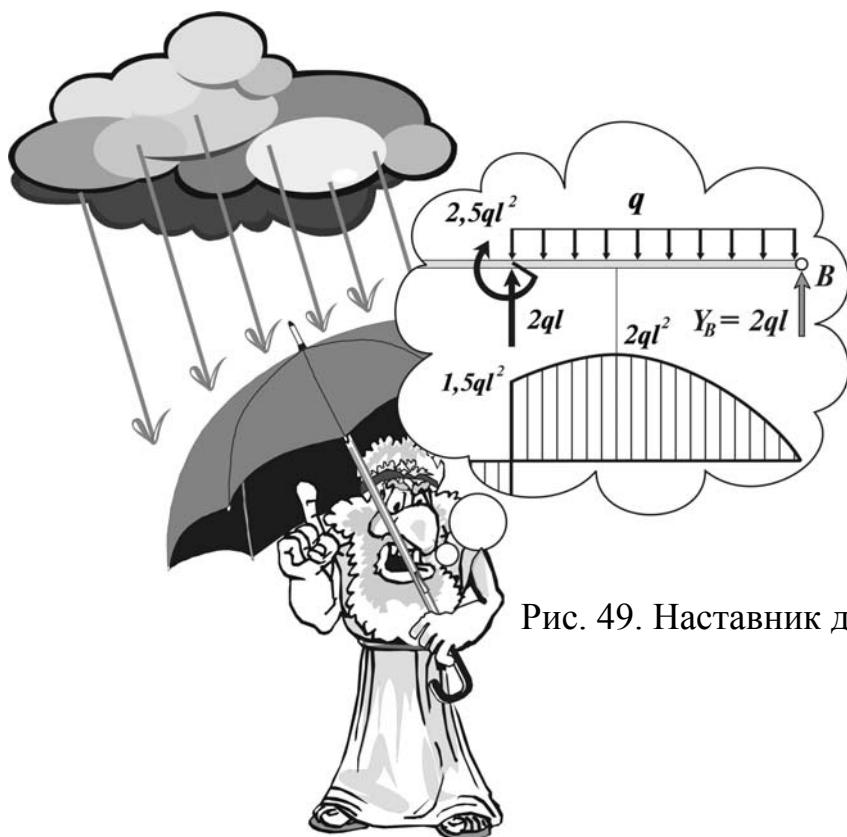


Рис. 49. Наставник демонстрирует правило зонтика

Эта закономерность в сопротивлении материалов формулируется как **правило зонтика** (рис. 49):

*эпюра изгибающего момента своей **выпуклостью** всегда направлена **навстречу** распределенной нагрузке, как зонтик своим куполом – навстречу дождевому потоку.*

– Сдается, что, как и в случае метода сил (Разрезали – Отбросили – Заменяли

– Уравновесили), при построении эпюры момента по эпюре поперечной силы на каждом участке приходится выполнять одни и те же действия...

– И опять вы правы. Действительно, для того, чтобы построить ЭМ на данном участке (или его части – это требуется, когда на участке достигается экстремальное значение момента), всякий раз нужно ответить на **пять** стандартных вопросов:

- 1) чему равен момент M_n в начале участка?
- 2) какой (возрастающей или убывающей) является функция $M(z)$ на этом участке?
- 3) каков характер (порядок) функции $M(z)$ на участке?
- 4) чему равно изменение момента $\Delta M = S_{\mathcal{EQ}}$ к концу участка?
- 5) и, наконец, чему равен момент $M_k = M_n + \Delta M = M_n + S_{\mathcal{EQ}}$ в конце участка?

Остается лишь аккуратно, с соблюдением масштаба провести линию эпюры, нанести вертикальную штриховку и проставить абсолютные значения момента. Кстати, теперь по положению эпюры можно судить, в каких сечениях сжатые волокна находятся сверху, а в каких – снизу; если эпюра построена правильно, это получится автоматически. И конечно, можно (и нужно!) сказать, в каком сечении (или сечениях) действует самый большой изгибающий момент и поперечная сила.



– А знаки на ЭМ забыли!

– И это не оплошность, а традиция. Почему всякие «сухопутные крысы» говорят «ко'мпас», а настоящие «морские волки» – «компа'с»?

Традиция!

– Но как же все-таки делается сам расчет на прочность?

– Здесь тоже нет ничего сложного, в этом вы убедитесь сами, прочитав следующую книжку автора – «В.Б. Порошин. Расчеты на прочность – это просто!»

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – Изд. 1...10.
2. Порошин, В.Б. Расчеты на прочность – это просто! / В.Б. Порошин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. – 44 с.
3. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М: Наука, 1964. – 608 с.
4. Контрольные задания для расчетно-графических работ по сопротивлению материалов / А.О. Щербакова, П.А. Тараненко, Н.Ю. Исаева; под ред. В.А. Ващука. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – Ч.1. – 96 с.

